Федак І.В.

ІІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики в Івано-Франківській області 2015 – 2016 н.р.

7 клас

1. Дідусь, тато та онук пробігли дистанцію від дому до крамниці та назад. При цьому онук туди і назад біг з однаковою швидкістю. Дідусь туди біг удвічі швидше, а назад у 3 рази повільніше за онука. Тато біг туди удвічі повільніше, а назад у 3 рази швидше за онука. В якому порядку вони повернуться додому?

Розв'язання. Позначимо через t час, затрачений онуком на дорогу від дому до крамниці. Тоді шлях в обидва боки онук подолає за час $2t$, тато – за час $2t+\frac{t}{3}$, а дідусь – за час $\frac{t}{2}+3t$. Оскільки $2t < 2t+\frac{t}{3} < \frac{t}{2}+3t$, то додому вони повернуться у такому порядку: онук, тато, дідусь.

2. З 22-х карток, на яких записані числа 1, 2, ..., 22, склали 11 дробів (перегортати картки не можна). Яка найбільша кількість цілих чисел може виявитись серед отриманих дробів?

Розв'язання. Прості числа $13, 17, 19$ можуть дати ціле число лише за умови, що вони стоять у чисельнику, а у них в знаменнику стоятиме 1. Тому принаймні один дріб не буде цілим числом, наприклад $\frac{17}{19}$. Інші 10 дробів, які є цілими числами, можна отримати, наприклад, так:

$$\frac{13}{1}, \frac{10}{2}, \frac{21}{3}, \frac{20}{4}, \frac{15}{5}, \frac{12}{6}, \frac{14}{7}, \frac{16}{8}, \frac{18}{9}, \frac{22}{11}.$$

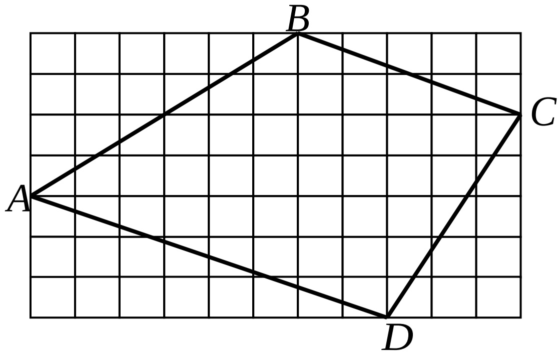
3. У таблиці 4×4, що показана на рисунку справа, треба у 4 комірки поставити по одній зірочці таким чином, щоб ця розстановка задовольняла такі умови: у кожному стовпчику та кожному рядку не повинно бути більше однієї зірочки, жодні дві зірочки не мають стояти у сусідніх по діагоналі комірках. У яких полях можуть стояти зірочки? Вкажіть усі можливі відповіді.

1				
2				
3				
4				
	а	б	в	г

Розв'язання. Якщо зірочка розташована в клітині «б2», то у сусідніх з нею восьми клітинках інших зірочок бути не може. Тому для решти трьох зірочок залишаються лише стовпчик «г» та рядок «4». Але тоді принаймні дві зірочки опиняться в одному рядку чи в одному стовпчику, що суперечить умові задачі. Тому в клітині «б2» зірочки немає. Аналогічно доводимо, що зірочок немає в клітинках «б3», «в2», «в3». Нехай тепер зірочка знаходиться в клітині «а1». З умови задачі та доведеного вище випливає, що у квадраті з діагоналлю «а1» - «в3» інших зірочок немає. А розміщення їх трьох у стовпчику «г» та рядку «4» знову приводить до протиріччя. Тому в клітині «а1» зірочки немає. Аналогічно доводимо відсутність зірочок в інших кутових клітинках: «а4», «г1», «г4». Таким чином, для розміщення зірочок залишаються решта 8 клітинок таблиці. Нескладно переконатися, що при цьому умову задачі задовольняють лише такі два варіанти їх розміщення:

(«а2», «б4», «в1», «г3») або («а3», «б1», «в4», «г2»).

4. Чому дорівнює площа чотирикутника $ABCD$, що зображений на рисунку справа, якщо сторона малого квадратика дорівнює 1 см?



Розв'язання. Оскільки діагональ прямокутника розбиває його на два трикутники однакової площі, то площа прямокутного трикутника дорівнює добутку його катетів. Поза чотирикутником $ABCD$ у намальованому прямокутнику знаходяться 4 прямокутні трикутники з гіпотенузами AB, BC, CD та DA відповідно, сума площ яких дорівнює

$$0,5\cdot 4\cdot 6+0,5\cdot 5\cdot 2+0,5\cdot 5\cdot 3+0,5\cdot 8\cdot 3=36,5.$$

Віднімаючи цю суму від площі $S=11\cdot 7=77$ всього прямокутника, отримаємо $S_{ABCD}=77-36,5=40,5$.

8 клас

1. Скільки існує трицифрових чисел з ненульовими цифрами, які мають таку властивість: при будь-якій перестановці цифр отримаємо трицифрове число, що ділиться націло на 4?

Розв'язання. Очевидно, що усі цифри числа – парні, бо на останній позиції може стояти лише парна цифра. Якщо серед чисел є одна із цифр 2 або 6, то таке число умову не задовольняє, бо на 4 діляться лише числа із закінченням $12, 32, ..., 92$ та $16, 36, ..., 96$. Тому число має складатися лише з цифр 4 або 8. Всі 8 таких чисел: 444, 448, 484, 488, 844, 848, 884, 888 – умову задачі задовольняють.

2. Знайдіть принаймні одну пару натуральних чисел (x, y), що задовольняє рівність:

$$\frac{1}{2}(x^2-y^3)=2016 .$$

Розв'язання. Перепишемо умову задачі таким чином:

$$x^2-y^3=2\cdot 2016=64\cdot 63=64\cdot(64-1)=64^2-4^3.$$

Звідси випливає, що рівність задовольняють числа $x=64$ та $y=4$. Ця пара не єдина. Підходить, наприклад, ще й пара чисел $x=69$ та $y=9$.

3. Андрій, Богдан та Олеся йшли однією дорогою від будинку до школи. Андрій йшов зі швидкістю a км/год протягом $(2-b)$ годин, Богдан йшов зі швидкістю b км/год протягом $(2-c)$ годин, Олеся йшла зі швидкістю c км/год протягом $(2-a)$ годин, де a,b,c – деякі, не обов’язково цілі, числа. Яка відстань між будинком та школою, якщо відомо, що вона вимірюється цілою кількістю кілометрів?

Розв’язання. Нехай шукана відстань дорівнює S км. Тоді

$$S=a(2-b),\ S=b(2-c),\ S=c(2-a).$$

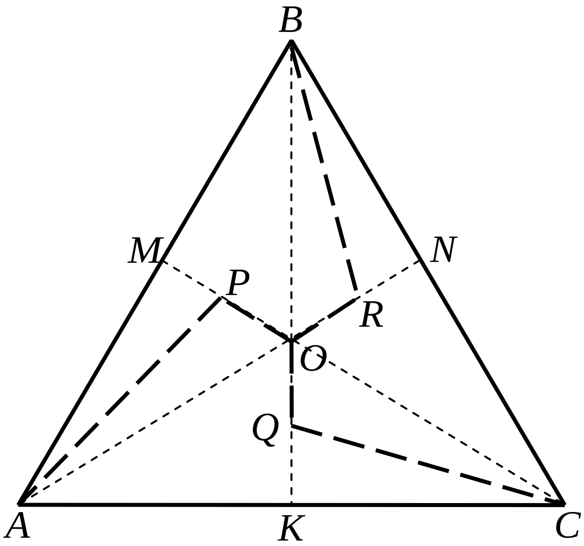
Отже, $S^3=abc(2-a)(2-b)(2-c)=a(2-a)\cdot b(2-b)\cdot c(2-c)$. З нерівності $x(2-x)\le 1 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\ge 0$ для $a,b,c\in\left(0;2\right)$ отримуємо, що $S^3\le 1$. А оскільки число S є натуральним, то $S=1$, і відстань до школи становить 1 км.

4. Чи можна рівносторонній трикутник розрізати на:

а) три однакових чотирикутники;

б) три однакових п’ятикутники?

Чотирикутники та п’ятикутники не обов’язково опуклі.



Розв’язання. Доведемо, що в обох випадках відповідь «так». Нехай ABC – рівносторонній трикутник, M, N, K – середини його сторін (див. рисунок справа). Відрізки AN, BK та CM перетинаються в точці O.

а). Для розбиття на однакові чотирикутники достатньо розглянути, наприклад, чотирикутники $AMOK$, $BNOM$ та $CKON$.

б). Позначимо тепер середини відрізків OM, ON та OK через P, R та Q відповідно. Шуканими п’ятикутниками є $ABROP$, $BCQOR$ та $CAPOQ$.

5. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ справджуються рівності: $\angle ABC=\angle BCD$ та $2AB=CD$. На стороні BC вибрана така точка X така, що $\angle BAX=\angle CDA$. Доведіть, що $AX=AD$.

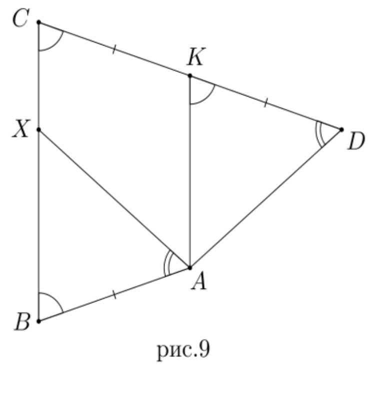


рис.9

Розв’язання. Нехай K – середина сторони CD (див. рисунок справа). Тоді $CK=DK=AB$, та оскільки $\angle ABC=\angle BCD$, то $ABCK$ –

рівнобічна трапеція. Отже, $AK \parallel BC$ та $\angle AKD = \angle BCD$. $\Delta ABX = \Delta DKA$ (за стороною $AB = DK$ та прилеглими до неї кутами), тому й $AX = AD$.

<u>9 клас</u>

1. Скільки існує трицифрових чисел з ненульовими цифрами, які мають таку властивість: при будь-якій перестановці цифр отримаємо трицифрове число, що ділиться націло на 4?

<u>*Розв'язання*</u>. Див. розв'язання задачі 8.1.

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + xy + xz = y, \\ y^2 + yz + yx = z, \\ z^2 + zx + zy = x. \end{cases}$$

<u>*Розв'язання*</u>. Запишемо задану систему рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} x(x+y+z) = y, \\ y(x+y+z) = z, \\ z(x+y+z) = x. \end{cases}$$

Якщо $x+y+z=0$, то звідси зразу отримуємо $x=y=z=0$. Якщо ж $x+y+z\neq 0$, то, додавши ці рівняння, одержимо $(x+y+z)^2 = x+y+z$, звідки маємо $x+y+z=1$. З врахуванням рівнянь системи знаходимо ще один розв'язок $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

3. Знайдіть усі натуральні n, для яких число 11^n-1 ділиться націло на 10^n-1.

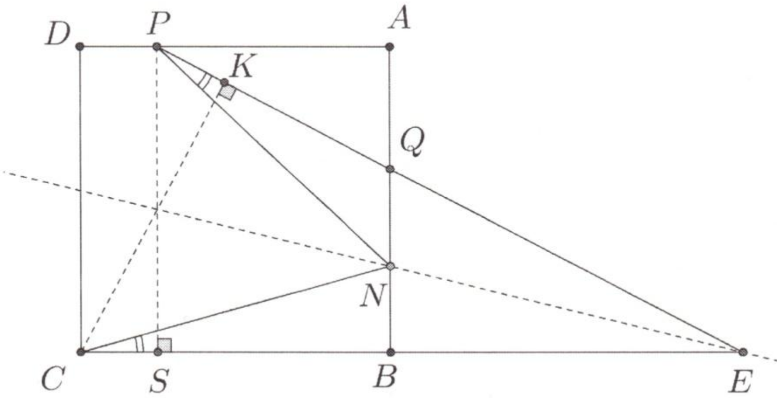
<u>*Розв'язання*</u>. Доведемо, що таких натуральних n не існує. Справді, при кожному n натуральному 10^n-1 ділиться на 3, то й 11^n-1 повинно ділитися на 3, що можливо лише при парних n. Але при таких n числа 10^n-1 діляться на 11, а числа 11^n-1 не діляться на 11 при жодному n.

4. Вершини куба деяким чином перенумеровані числами $1; 2; ...; 8$. Петрику повідомили для трьох з шести граней куба номери вершин, що їм відповідають: $\{1; 4; 6; 8\}$, $\{1; 2; 6; 7\}$, $\{1; 2; 5; 8\}$. Чи зможе Петрик за цими даними сказати, який номер має вершина, що найбільш віддалена від вершини з номером 5?

<u>*Розв'язання*</u>. Зможе. Наявність одиниці у трьох названих множинах номерів вершин свідчить, що ці три грані сходяться в одній вершині з номером 1. Наявність пар однакових номерів у названих множинах свідчить про те, що з цієї вершини виходять ребра 1 – 2, 1 – 6 та 1 – 8, причому вершина з номером 6 є протилежною по великій діагоналі куба до четвертої вершини грані, три з вершин якої мають

номери 1, 2, 8, тобто до вершини з номером 5. Тому найбільш віддаленою від вершини з номером 5 є вершина з номером 6.

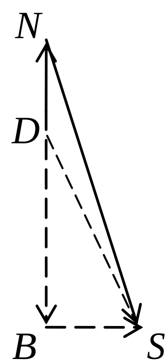
5. На сторонах AB та AD квадрата $ABCD$ вибрані точки N та P відповідно таким чином, що $PN = NC$, точка Q – точка на відрізку AN, для якої $\angle NCB = \angle QPN$. Доведіть, що $\angle BCQ = \frac{1}{2}\angle PQA$.



Розв'язання. Нехай $E = PQ \cap BC$ (див. рисунок справа). З рівності відрізків $PN = NC$ випливає рівність $\angle NPC = \angle PCN$. З іншого боку, $\angle NCB = \angle QPN$. Звідси випливає, що трикутник EPC рівнобедрений, отже, його висоти PS та CK рівні. Тому $CK = PS = AB = BC$, і прямокутні трикутники QBC та QKC рівні (за рівними катетами і спільною гіпотенузою). Тому CQ – бісектриса кута $\angle BCK$. Звідси, враховуючи, що чотирикутник $KCBQ$ – вписаний, отримуємо $\angle BCQ = \angle KCQ = \frac{1}{2}\angle BCK = \frac{1}{2}\angle PQA$, що й завершує доведення.

10 клас

1. Близнюки Петрик та Остап посварилися і стали ходити з дому до школи різними шляхами. Петрик спочатку йде 210 метрів на південь, а далі 70 метрів на схід і потрапляє до школи. Остап спочатку йде певний час на північ, а далі по прямій до школи. Скільки саме метрів Остап йде на північ, якщо близнюки ходять з однаковою швидкістю і приходять до школи одночасно?



Розв'язання. Позначимо точки таким чином: домівка – D, місце школи – S, точка де Петрик повертає на схід – B, точка, де повертає Остап, – N (див. рисунок справа). Тоді за умовою $DB = 210$, $BS = 70$, $DN = x$, $NS = y$. За теоремою Піфагора $BN^2 + BS^2 = NS^2$ або $(210 + x)^2 + 70^2 = y^2$. Оскільки, крім того, за умовою $x + y = 280$, то $(210 + x)^2 + 70^2 = (280 - x)^2$. Звідси знаходимо $x = 30$, тобто Остап йде на північ 30 метрів.

2. Є 12 стільців, розташованих в одну лінію та перенумеровані зліва направо числами $1; 2; ...; 12$. Федір може стрибати по цих стільцях за такими правилами: зі стільця з номером k він може стрибнути на стілець з номером n тоді і тільки тоді, коли $|k - n| = 5$ або

$|k-n|=8$. Відомо, що Федір, розпочавши з деякого стільця, зміг пострибати по них так, що побував на кожному стільці рівно один раз. Із стільця з яким номером Федір мав почати стрибати?

<u>*Розв'язання*</u>. Зауважимо, що існують лише два стільці (за номерами 5 та 8), стрибнути на які чи зістрибнути з яких можна єдиним способом. Тому стрибки Федора обов'язково повинні розпочинатися з одного з них та закінчуватися на іншому. При цьому однозначно отримуємо два варіанти стрибків, які задовольняють умови задачі. Це:

$$5\to10\to2\to7\to12\to4\to9\to1\to6\to11\to3\to8$$

та у зворотному напрямі.

3. Квадратний тричлен $f(x)=ax^2+bx+c$ з цілими коефіцієнтами для кожного цілого значення x ділиться націло на натуральне число N. Чи обов'язково на N ділиться кожний з коефіцієнтів цього тричлена, якщо: ***а)*** $N=2016$; ***б)*** $N=2017$?

<u>*Розв'язання*</u>. ***а).*** Не обов'язково. Наприклад, тричлен $f(x)=1008x^2+1008x+2016=1008x(x+1)+2016$ для кожного цілого значення x ділиться націло на 2016, бо для цілих x добуток $x(x+1)$ завжди парний.

б). Обов'язково. $f(0)=c\,\vdots\,2017$; $f(1)=a+b+c\,\vdots\,2017 \Rightarrow a+b\,\vdots\,2017$; $f(-1)=a-b+c\,\vdots\,2017 \Rightarrow a-b\,\vdots\,2017$. Але тоді на 2017 діляться також числа $2a=(a+b)+(a-b)$ та $2b=(a+b)-(a-b)$. Оскільки ж число 2017 непарне, то усі коефіцієнти тричлена повинні ділитися на 2017.

4. На сторонах AB та AD квадрата $ABCD$ вибрані точки N та P відповідно таким чином, що $PN=NC$, точка Q – точка на відрізку AN, для якої $\angle NCB=\angle QPN$. Доведіть, що $\angle BCQ=\frac{1}{2}\angle PQA$.

<u>*Розв'язання*</u>. Див. розв'язання задачі 9.5.

5. Для додатних чисел a, b, c, що задовольняють умову $a+b+c=1$, доведіть нерівність:

$$\frac{a}{a+b^2}+\frac{b}{b+c^2}+\frac{c}{c+a^2}\le\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

<u>*Розв'язання*</u>. Розглянемо такі перетворення:

$$\frac{a}{a+b^2}=\frac{a}{a(a+b+c)+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2+ab+ac}\le\frac{a}{2ab+ab+ac}=\frac{1}{3b+c}.$$

Далі, з нерівності між середніми гармонійним та арифметичним маємо

$$\frac{4}{\frac{3}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{4}{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\le\frac{b+b+b+c}{4}=\frac{3b+c}{4} \text{ або } \frac{1}{3b+c}\le\frac{1}{16}\left(\frac{3}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Додавши тепер три аналогічні нерівності, отримаємо:

$$\frac{a}{a+b^2}+\frac{b}{b+c^2}+\frac{c}{c+a^2}\le\frac{1}{3b+c}+\frac{1}{3c+a}+\frac{1}{3a+b}\le$$
$$\le\frac{1}{16}\left(\frac{3}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{3}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

<u>11 клас</u>

1. Порівняйте числа: $A=11$, $B=\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot...\cdot\log_{2015}2016$ та $C=\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot...\cdot\log_{2016}2015$.

<u>*Розв'язання*</u>. Кожен множник числа C додатний і менший за 1, тому $C<1$. Кожен множник числа B більший за 1, тому $B>1$. І, нарешті, скориставшись формулою $\log_a b=\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}$, отримуємо:

$$B=\log_2 3\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 4}\cdot...\cdot\frac{\log_2 2016}{\log_2 2015}=\log_2 2016<\log_2 2048=11.$$

Отже, $C<B<A$.

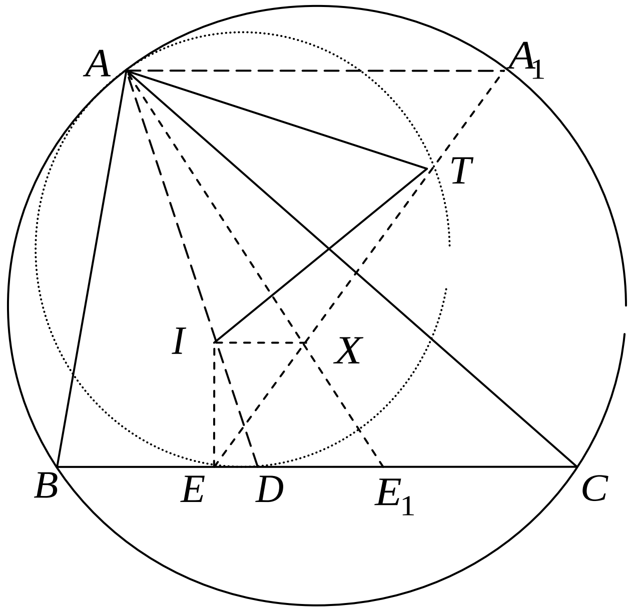
2. Квадратний тричлен $f(x)=ax^2+bx+c$ з цілими коефіцієнтами для кожного цілого значення x ділиться націло на 2017. Чи обов'язково на 2017 ділиться націло кожний з коефіцієнтів цього тричлена?

<u>*Розв'язання*</u>. Див. розв'язання задачі 10.3 *б)*.

3. Знайдіть усі трійки додатних чисел a,b,c, що задовольняють умови: $ab\left(1-\dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right)=bc\left(1-\dfrac{a^2}{(b+c)^2}\right)=ca\left(1-\dfrac{b^2}{(c+a)^2}\right)$.

<u>*Розв'язання*</u>. Зауважимо, що у всіх трьох дужках вирази одного знака. Вони додатні, бо для додатних чисел a,b,c не можуть одночасно виконуватися нерівності: $c\ge a+b$, $a\ge b+c$, $b\ge c+a$. Припустимо, що $a<b$. Тоді $0<ca<bc$, $\dfrac{a}{b+c}<\dfrac{b}{a+c}$, $0<1-\dfrac{b^2}{(c+a)^2}<1-\dfrac{a^2}{(b+c)^2}$, отже, друга з рівностей умови задачі не справджується. Аналогічно доводимо хибність припущення $a>b$. Тому $a=b$. Так само встановлюємо рівності $b=c$ та $c=a$. Остаточно отримуємо: $a=b=c=t$, де t − довільне додатне число.

4. У трикутнику ABC проведена бісектриса AD, E – точка дотику вписаного кола до сторони BC, I – центр вписаного кола ΔABC. Точка A_1 на описаному колі ΔABC така, що $AA_1\parallel BC$. Позначимо через T – другу точку перетину прямої EA_1 та описаного кола ΔAED. Доведіть, що $IT=IA$.



Розв'язання. Нехай $\angle B > \angle C$ як на рисунку справа. Позначимо через E_1 точку на відрізку BC, для якої $BE = E_1C$. За властивістю відрізків дотичних до вписаного кола маємо

$EE_1 = CE - CE_1 = CE - BE = AC - AB$.

Нехай $X = A_1E \bigcap E_1A$. Тоді доведемо, що $IX \parallel BC$. Оскільки

$\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{AB + AC}{BC}$,

$\dfrac{AX}{XE_1} = \dfrac{AA_1}{EE_1} = \dfrac{AA_1}{AC - AB}$, то

$\dfrac{AX}{XE_1} : \dfrac{AI}{ID} = \dfrac{AA_1 \cdot BC}{AC^2 - AB^2} = \dfrac{\left(BC - 2AB\cos\angle B\right) \cdot BC}{BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\angle B} = 1.$ Тому $\dfrac{AX}{XE_1} = \dfrac{AI}{ID}$, звідки $IX \parallel BC$. З одержаної паралельності та того, що чотирикутник $DEAT$ – вписаний, отримуємо, що чотирикутник $IATX$ – також вписаний. Пари точок A, A_1 та E, E_1 симетричні відносно серединного перпендикуляра до сторони BC, тому $XE = XE_1$. Тоді

$$\angle ATI = \angle AXI = \angle XE_1E = \angle XEE_1 = \angle IXE = \angle TAI,$$

звідки остаточно знаходимо, що $IT = IA$.

5. Для яких натуральних $n \geq 3$ можна за скінченну кількість кроків з набору чисел $1; 2; ...; n$ отримати набір з n однакових чисел, якщо за один крок можна вибирати два довільних числа та збільшити кожне з них на довільне однакове натуральне число?

Розв'язання. Якщо $n = 4k - 1$ чи $n = 4k$, то проробимо заміни:

$$(1; 3) \to (2; 4),\ (5; 7) \to (6; 8),\ \ldots,\ (4k-3; 4k-1) \to (4k-2; 4k).$$

Далі, вибираючи пари $(2; 2)$, $(4; 4)$, $\ldots$, $(4k-2; 4k-2)$, зробимо всі числа набору рівними $4k$. Якщо $n = 4k+1$, то на першому етапі поступаємо аналогічно, а на другому, додатково вибираючи ще й пару $(4k; 4k)$, зробимо всі числа набору рівними $4k+1$. І, нарешті, доведемо, що для $n = 4k + 2$ вирівняти всі числа неможливо. Справді, сума $1 + 2 + ... + \left(4k + 2\right) = \dfrac{1}{2}(4k+2)(4k+3) = (2k+1)(4k+3)$ – непарна Кожного разу ми збільшуємо її на парне число, тому отримати наприкінці, у разі всіх однакових чисел, парну суму не вдасться.