Завдання 1 – 8 XIII обласного турніру юних математиків 2017-2018 н. р.

1. На XIII обласному ТЮМ-2017 відзначили 13 переможців особистої першості. Всі вони виявилися різного зросту, але отримали однакові призи з 17 цукерок. Кожен хлопець-переможець подарував по одній цукерці кожному вищому за себе переможцеві, а кожна дівчина-переможець – кожному нижчому за себе переможцеві. В результаті в переможців Саші, Жені та Роми кількість цукерок виявилася однаковою. Чи обов’язково серед названих трьох учнів є: а) хоч одна дівчинка; б) хоч один хлопчик?

2. Таблицю розмірами 5×5 Миколка заповнив різними натуральними числами від 1 до 25 включно і стверджує, що всі 12 сум чисел по рядках, стовпцях та діагоналях таблиці є простими числами. Чи не помиляється він?

3. Числа Фібоначчі визначаються рівностями: $F_1 = F_2 = 1,\ F_{k+2} = F_k + F_{k+1},\ k \in \mathbb{N}$. Знайдіть усі можливі значення виразу $\dfrac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}} + \dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}} + \dfrac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}},\ n \in \mathbb{N}$.

4. Дослідіть, яких значень можуть набувати площі трикутників $A_1A_2A_3$ з вершинами $A_1\left(F_{m+1};F_{m+2}\right)$, $A_2\left(F_{m+3};F_{m+4}\right)$, $A_3\left(F_{m+5};F_{m+6}\right)$, $m \ge 0$, координати яких є числами Фібоначчі.

5. Нехай a, b, c, d – цілі числа такі, що $ad > 0$. Відомо, що кожен з трьох квадратних тричленів ax^2+bx+c, $ax^2+bx+(c-d)$ та $ax^2+bx+(c+d)$ має раціональні корені. Доведіть, що існує прямокутний трикутник з цілими сторонами та площею $S = ad$.

6. Розв’яжіть наступні системи рівнянь:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x^3+x+y=x^2+2, \\ y^3+y+z=y^2+2, \\ z^3+z+x=z^2+2; \end{cases} \quad \text{б)}\ \begin{cases} x^3+x+y=x^2+3, \\ y^5+y+z=2y^4+5, \\ z^7+2z+x=3z^6+7; \end{cases} \quad \text{в)}\ \begin{cases} x^7+x+y=4x^2+7, \\ y^7+2y+z=3y^4+7, \\ z^7+3z+x=z^6+7. \end{cases}$$

7. Для додатних чисел a, b, c, x доведіть нерівність

$$\frac{a^3}{ax^2+2bx+c}+\frac{b^3}{bx^2+2cx+a}+\frac{c^3}{cx^2+2ax+b} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{(x+1)^2}.$$

8. Для $a > b > c > 0$ доведіть нерівності:

а) $(a-c)\left(a^2+c^2\right) > (a-b)\left(a^2+b^2\right)+(b-c)\left(b^2+c^2\right)$;

б) $(a+c)\left(a^2-c^2\right) < (a+b)\left(a^2-b^2\right)+(b+c)\left(b^2-c^2\right)$.

Завдання **9. – 20.** будуть виставленні на даному сайті після оприлюднення завдань заключного етапу XX Всеукраїнського турніру юних математиків.

Примітка. При підготовці доповіді звернути увагу на:

- аналіз моделі та етапів розв’язування задачі;
- методи реалізації цих етапів;
- безпосереднє розв’язування задачі;
- висновки та узагальнення.

Для узагальнень окремих задач рекомендується використати умови завдань заключного етапу XX Всеукраїнського турніру юних математиків.