Завдання 1 – 20 XIII обласного турніру юних математиків 2017-2018 н. р.

1. На XIII обласному ТЮМ-2017 відзначили 13 переможців особистої першості. Всі вони виявилися різного зросту, але отримали однакові призи з 17 цукерок. Кожен хлопець-переможець подарував по одній цукерці кожному вищому за себе переможцеві, а кожна дівчина-переможець – кожному нижчому за себе переможцеві. В результаті в переможців Саші, Жені та Роми кількість подарованих їм цукерок виявилася однаковою. Чи обов'язково серед названих трьох учнів є: а) хоч одна дівчинка; б) хоч один хлопчик?

2. Таблицю розмірами 5×5 Миколка заповнив різними натуральними числами від 1 до 25 включно і стверджує, що всі 12 сум чисел по рядках, стовпцях та діагоналях таблиці є простими числами. Чи не помиляється він?

3. Числа Фібоначчі визначаються рівностями: $F_1 = F_2 = 1,\ F_{k+2} = F_k + F_{k+1},\ k \in \mathbb{N}$. Знайдіть усі можливі значення виразу $\dfrac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}} + \dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}} + \dfrac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}},\ n \in \mathbb{N}$.

4. Дослідіть, яких значень можуть набувати площі трикутників $A_1A_2A_3$ з вершинами $A_1\left(F_{m+1};F_{m+2}\right)$, $A_2\left(F_{m+3};F_{m+4}\right)$, $A_3\left(F_{m+5};F_{m+6}\right)$, $m \geq 0$, координатами яких є числа Фібоначчі.

5. Розв'яжіть наступні системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x^3 + x + y = x^2 + 2, \\ y^3 + y + z = y^2 + 2, \\ z^3 + z + x = z^2 + 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3 + x + y = x^2 + 3, \\ y^5 + y + z = 2y^4 + 5, \\ z^7 + 2z + x = 3z^6 + 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^7 + x + y = 4x^6 + 7, \\ y^7 + 2y + z = 3y^6 + 7, \\ z^7 + 3z + x = z^6 + 7. \end{cases}$

6. Для додатних чисел a, b, c, x доведіть нерівність

$$\frac{a^3}{ax^2 + 2bx + c} + \frac{b^3}{bx^2 + 2cx + a} + \frac{c^3}{cx^2 + 2ax + b} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(x+1)^2}.$$

7. Для $a > b > c > 0$ доведіть нерівності:

а) $(a-c)\left(a^2+c^2\right) > (a-b)\left(a^2+b^2\right) + (b-c)\left(b^2+c^2\right)$;

б) $(a+c)\left(a^2-c^2\right) < (a+b)\left(a^2-b^2\right) + (b+c)\left(b^2-c^2\right)$.

8. У рівнобічній трапеції $ABCD$ з основами AD та BC діагоналі перетинаються в точці P, а прямі AB та CD – в точці Q. O_1 та O_2 – центри кіл, описаних навколо трикутників ABP та CDP, r – радіус цих кіл. Побудуйте трапецію $ABCD$ за даними відрізками O_1O_2, PQ та радіусом r.

9. У нерівнобедреному трикутнику ABC проведено висоти AH, BT, CR. На стороні BC відмітили точку P; точки X та Y – проекції P на AB та CA відповідно. Дві спільні зовнішні дотичні до описаних кіл трикутників XBH та HCY перетинаються в точці Q. Прямі RT та BC перетинаються в точці K. Доведіть, що точка Q лежить на фіксованій прямій незалежно від вибору P.

10. Вкажіть хоч один прямокутний трикутник ABC із цілочисловими сторонами, всередині якого можна вказати таку точку M, що довжини відрізків MA, MB та MC є цілими. Чи існує принаймні два таких трикутники, які не є подібними?

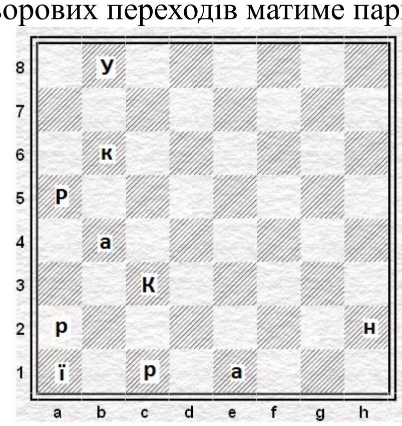
11. Знайдіть хоч одну четвірку натуральних чисел a, b, c, d таких, що $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$. Скінченною чи нескінченною є множина таких четвірок за умови, що жодна четвірка цієї множини не утворюється з іншої множенням усіх її чисел на одне і те ж число?

12. Знайдіть всі натуральні числа n, k такі, що $C_{n-1}^{k+1} = C_{n+1}^{k-1}$.

13. Клітинки дошки 8×8 розфарбовані в шаховому порядку. За один хід можна вибрати клітинку дошки та одночасно перефарбувати в протилежний колір усі клітинки, що мають із нею спільну сторону, при цьому сама клітинка не перефарбовується. Чи можна за декілька ходів перефарбувати в протилежний колір усі клітинки дошки?

14. Паркан складається з 20 непофарбованих дошок. Марічка і Петрик по черзі фарбують дошки в блакитний або жовтий колір (кожен з гравців може пофарбувати будь-яку непофарбовану дошку в будь-який із двох кольорів). Починає Марічка. Вона хоче, щоб у пофарбованому паркані було якомога більше кольорових переходів, Петрик – щоб їх було якомога менше. Таким чином, ідеал Марічки – це паркан, пофарбований у шаховому порядку (19 переходів), а ідеал Петрика – однокольоровий паркан (0 переходів). Як слід грати Марічці та Петрику, щоб кожен з них досягнув своєї мети, та яку кількість кольорових переходів матиме паркан?

15. На діаграмі зображено позицію, яка могла би виникнути в шаховій партії. Різні літери позначають різні шахові фігури. Великі літери відповідають певному кольору фігури, маленькі – іншому кольору. Треба визначити цю позицію.



16. Для множини $\{1, 2, \dots, n\}$ позначимо через U_k кількість її перестановок, в яких рівно k елементів залишаються на своїх місцях. Доведіть, що $\sum_{k=1}^{n} kU_k = n!$

17. Доведіть, що існує таке число n, що кожне натуральне число, яке перевищує n, можна розбити на п'ять взаємно простих доданків, які більші за 1.

18. Яку найбільшу кількість дільників може мати число m, якщо відомо, що воно менше за 1 000 000 ? (Одиниця та m також вважаються дільниками).

19. Про збіжну послідовність $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, a_2, a_3, ... відомо, що її члени з непарними номерами спадають, а з парними номерами – зростають і, крім того, для всіх $n \geq 1$ справджується нерівність

$$2 \leq \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n - a_{n+1}} \leq 3.$$

Знайдіть межі, в яких може знаходитись границя цієї послідовності.

20. На деяких клітинках дошки $n\times n$ стоять фішки (не більше однієї фішки на клітинці) так, що жодні чотири фішки не знаходяться у вершинах прямокутника. Доведіть, що кількість фішок не перевищує $n\left(\sqrt{n}+1\right)$.

Примітка. При підготовці доповіді звернути увагу на:

- аналіз моделі та етапів розв'язування задачі;
- методи реалізації цих етапів;
- безпосереднє розв'язування задачі;
- висновки та узагальнення.

Для узагальнень окремих задач рекомендується використати умови завдань заключного етапу XX Всеукраїнського турніру юних математиків.