Завдання XI обласного турніру юних математиків 2015-2016 н. р.

1. Знайдіть найменше складене число n, для якого число $2^{n-1}-1$ ділиться на n.

2. Для кожного натурального числа n знайдіть усі пари натуральних чисел $x, y,$ які задовольняють рівняння $x^n - y^n = 2015.$

3. Знайдіть кількість натуральних чисел, менших за 1000, що мають таку властивість: сума цифр числа дорівнює кількості складів (тобто голосних літер) у його назві.

4. На островах A, B і C живе по 2000 людей, а на острові D – 2015 жителів. Кожні два острови з'єднані між собою окремим мостом. Час від часу по мостах із якогось із островів три жителі переселяються на три інші острови – по одному на кожен острів. Чи може у результаті вийти, що на острові A житимуть 2015 осіб, а на островах B, C та D – по 2000 осіб?

5. Є набір із дев'яти цифр від 1 до 9.

5.1. За допомогою цього набору складіть дев'ятицифрове число, кратне 37.

5.2. Обґрунтуйте, що існує понад 215 різних дев'ятицифрових чисел, кратних 37, які можна утворити з такого набору.

5.3. Дослідіть, чи може їх бути більше ніж 2015.

6. Восьмицифрове натуральне число n назвемо *бузковим,* якщо:

а) воно складається з цифр 1, 2, …, 8, кожна з яких використовується по одному разу;

б) число $2n$ також складається з цифр 1, 2, …, 8, кожна з яких також використовується по одному разу.

6.1. Знайдіть хоч одне бузкове число.

6.2. Доведіть, що існує більше ста бузкових чисел.

6.3. Доведіть, що кількість бузкових чисел ділиться на 3.

7. Розв'яжіть у додатних числах x, y, z систему рівнянь:

$$\frac{1}{x} - 20y + 15z = 11, \quad \frac{1}{y} - 15z + 11x = 20, \quad \frac{1}{z} - 11x + 20y = 15.$$

8. Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівність:

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}} - \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \ge \frac{1}{3}.$$

9. b_1, b_2, b_3 – перестановка невід'ємних чисел a_1, a_2, a_3. Доведіть, що

$$\left(1+a_1+a_1^2\right)\left(1+a_2+a_2^2\right)\left(1+a_3+a_3^2\right) \ge \left(1+a_1+a_1b_1\right)\left(1+a_2+a_2b_2\right)\left(1+a_3+a_3b_3\right).$$

10. Дослідіть, для яких додатних дійсних чисел x, y справджується нерівність $x^y + y^x \le x^x + y^y$.

11. Нехай $M = \{\sin x, \arcsin x, \cos x, \arccos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{ctg} x, \operatorname{arcctg} x\}$ – множина елементарних тригонометричних функцій від змінної *x*. Дослідіть, чи існує таке натуральне число *n* та такі функції $f_1, f_2, \ldots, f_n \in M$, що $f_1\left(\ldots f_{n-1}\left(f_n(1)\right)\ldots\right) = 2015$.

12. На площині задано 6 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Через кожні дві із заданих точок провели пряму. Точку площини, яка відмінна від заданих, називатимемо *потрійною*, якщо через неї проходить рівно три проведені прямі. Знайдіть максимальну можливу кількість *потрійних* точок.

13. Дослідіть, яку найбільшу кількість ребер може мати граф з вісьмома вершинами, у якому відсутні цикли довжини 4.

14. Дослідіть, яка максимальна кількість точок, відстань між будь-якими двома із яких не менша за 1, може належати кільцю $1 \le x^2 + y^2 \le 2$.

15. У трикутнику ABC серединні перпендикуляри до сторін AB та BC перетинають висоту, проведену з вершини B у точках K та M відповідно. Знаючи положення точок B, K, M, відновіть трикутник ABC.

16. В опуклому п'ятикутнику $A_1A_2A_3A_4A_5$ позначимо $a_i = \dfrac{A_iA_{i+1}}{\sin\left(\angle A_{i+2} + \angle A_{i+4}\right)}$, $1 \le i \le 5$, де $A_{k+5} = A_k$, $k \ge 1$. Доведіть, що якщо всі a_i рівні між собою, то навколо п'ятикутника можна описати коло. Чи справедливе обернене твердження?

17. Знайдіть мінімум відношення бічної сторони рівнобедреного трикутника до радіуса вписаного у нього кола.

18. Дослідіть, чи можна трьома різними хордами, жодна з яких не є діаметром, розбити круг на декілька рівновеликих частин.

19. Папа Карло витесав із дерев'яного поліна опуклий многогранник, усі грані якого – трикутники, і пофарбував його поверхню у синій колір. Буратіно розрізав цей многогранник на тетраедри: усі вершини тетраедрів є вершинами многогранника і будь-які два тетраедри або не мають спільних вершин, або мають спільну вершину, спільне ребро чи спільну грань. Буратіно стверджує, що він це зробив так, що у кожного тетраедра рівно одна грань синя. Чи не бреше він?

20. Вписане коло ω трикутника ABC дотикається сторін BC, CA, AB у точках D, E, F відповідно. Нехай X, Y, Z – точки, які діаметрально протилежні до точок D, E, F у колі ω. Прямі AX, BY, CZ перетинають сторони BC, CA, AB у точках D', E', F' відповідно. На відрізках AD', BE', CF' відзначили відповідно точки X', Y', Z' так, що $D'X' = AX$, $E'Y' = BY$, $F'Z' = CZ$. Доведіть, що точки X', Y', Z' збігаються.

Примітка. При підготовці доповіді звернути увагу на:

- аналіз моделі та етапів розв'язування задачі;
- методи реалізації цих етапів;
- безпосереднє розв'язування задачі;
- висновки та узагальнення.

Для узагальнень окремих задач рекомендується використати умови завдань заключного етапу XVIII Всеукраїнського турніру юних математиків.