Завдання XV обласного турніру юних математиків 2019-2020 н.р.

1. На участь в турнірі юних математиків подали заявки 16 команд. Оргкомітет планує провести турнір у чотири тури так, щоб у кожному турі у чотирьох групах змагалися по чотири команди, причому жодні дві команди-учасниці не зустрічалися між собою більше одного разу. Чи вдасться йому реалізувати свій задум?
2. Миколка стверджує, що може вибрати на бічній стороні BC рівнобедреного трикутника ABC, всі кути якого вимірюються цілим числом градусів, таку точку E, що $BE = AC$, і кут AEC також вимірюється цілим числом градусів. Доведіть, що такий трикутник існує. Чи знайдеться не подібний до нього рівнобедрений трикутник з такими ж властивостями?
3. Висота CH, бісектриса CK та медіана CM трикутника ABC ділять кут C на чотири рівні частини. Знайдіть градусні міри всіх кутів такого трикутника.
4. Доведіть, що рівняння $x^2 - xy - y^2 = 20^2 + 20 \cdot 19 - 19^2$ має нескінченну кількість розв'язків у натуральних числах x та y, та вкажіть принаймні три пари взаємно простих натуральних чисел a та b, для яких розв'язки у натуральних числах x та y має рівняння $x^4 - x^2y^2 - y^4 = a^4 + a^2b^2 - b^4$.
5. Знайдіть принаймні три четвірки натуральних чисел таких, що добуток будь-яких двох чисел кожної з четвірок, збільшений на 1, є квадратом натурального числа. Чи існують такі 4 попарно різні додатні раціональні числа, жодне з яких не є натуральним числом, що добуток будь-яких двох із них, збільшений на 1, є квадратом раціонального числа?
6. Для всіх натуральних чисел n доведіть таку подвійну нерівність:
$$n^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\right) < \frac{9}{8}n^2.$$
7. В шаховій партії за ходу білих виникла наступна позиція. Білі: Кр a1, пп. b5, b6, e4, e5, g3; чорні: Кр g8, пп. b7, e6, g4. З яким результатом закінчиться ця партія за правильної гри обох суперників?
8. Розмістіть на шаховій дошці туру і найбільшу кількість коней так, щоб жодна фігура не била іншу.
9. Нехай m – натуральне число. Знайдіть усі пари додатних чисел a та b, для яких справедлива нерівність $\dfrac{a^{m+1} + b^{m+1}}{a^m + b^m} \ge \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.
10. У Лототроні міститься 36 занумерованих кульок. Під час розіграшу лотереї випадає шість кульок. Гравець купує білет і записує в ньому номери шести кульок, які, на його думку, випадуть під час розіграшу. Чи може гравець купити 12 білетів і гарантовано, принаймні в одному з них, вгадати щонайменше два номери?
11. Число 10 можна двома способами подати як суму двох простих чисел, перше з яких не більше від другого: $10 = 3 + 7$ та $10 = 5 + 5$. А чи існує натуральне число, яке таким чином можна представити не менше як десятьма способами?
12. Раціональне число $\dfrac{r}{s} = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{3}{4^2} + ... + \dfrac{35}{36^2}$ є сумою тридцяти п'яти дробів. Доведіть, що r ділиться на 37.
13. На площині довільним чином вибрали 4 різні точки. Доведіть, що їх можна позначити буквами A, B, C, D так, що для деякої точки M цієї площини правильною буде рівність $AM + BM = CM + DM$.

14. На висоті AH_1 гострокутного трикутника ABC з попарно різними сторонами вибрали деяку точку X, з якої на сторони AB та AC опустили перпендикуляри XN та XM відповідно. Виявилося, що H_1A – бісектриса кута MH_1N. Доведіть, що X – точка перетину висот трикутника ABC.

15. Петрик має однакові паралелограми з кутами 45° та 135° і довжинами сторін 1 та $\sqrt{2}$. Доведіть, що у прямокутнику розмірів 2×19 він не зможе помістити більше ніж 36 параллелограмів. Яку найбільшу кількість таких паралелограмів він зможе помістити у квадраті розмірами 4×4? Паралелограми можна довільним чином повертати чи перевертати, але не можна навіть частково накладати один на одного?

16. На дошці відмічено n точок, які є вершинами правильного n-кутника. В одній із точок знаходиться фішка. Два гравці по черзі переміщують її в іншу відмічену точку і при цьому малюють відрізок, що їх сполучає. Якщо дві точки вже з'єднані відрізком, то такий хід заборонений. Гравець, який не зможе зробити хід, програє. Хто переможе за правильної гри обох суперників, якщо: а) $n=6$; б) $n=7$?

17. Задано чотири послідовні члени арифметичної прогресії a_1, a_2, a_3, a_4. Миколка і Ганнуся грають у таку гру. Вони по черзі (першою ходить Ганнуся) вибирають одне з чотирьох заданих чисел і записують його замість символу * у вираз $* \cdot * - * \cdot *$. Після чотирьох ходів у виразі кожне із заданих чисел зустрічається по одному разу. Якщо значення виразу є від'ємним числом, то виграє Миколка. В іншому випадку виграє Ганнуся. Чи є у Ганнусі виграшна стратегія?

18. Двоє грають у таку гру. Перший називає будь-який натуральний дільник числа 1000000, а далі гравці по черзі множать або ділять останній названий дільник на просте число так, щоб отриманий результат був знову дільником числа 1000000, який не називався раніше. Гравець, який не зможе зробити хід, програє. Хто переможе за правильної гри обох суперників?

19. Цар Сиракуз Гієрон мав 6 золотих злитків. На вигляд злитки схожі, проте маси у них різні (однакових мас немає). Архімеду видали терези зі стрілкою і бирки з номерами від 1 до n. Гієрон наказав Архімеду зважити ці злитки й на кожний приклеїти бирку так, щоб номери йшли за зростанням мас. При цьому Архімеду видають злитки по одному й одразу після зважування й наклеювання бирки його забирають (тобто змінити бирку вже не можна). Проте дозволяється, щоб номери йшли не за порядком: наприклад, можна, щоби найлегший мав номер 3, другий за масою – 8 тощо. Вкажіть хоч одне n, за якого Архімед зуміє впоратись із завданням?

20. За допомогою мікроскопу вчені вивчають 5 мікроорганізмів, які є ідентичними між собою в усьому, крім розмірів та швидкості росту. Кожен мікроорганізм росте з певною лінійною швидкістю, яка для різних організмів може бути різною. Щохвилини вчені проводять спостереження: вони дивляться у мікроскоп та занотовують 5 чисел, що відповідають розмірам мікроорганізмів у даний момент часу (порядок чисел виявляється довільним, оскільки організми весь час рухаються). Доведіть, що існує таке число m, яке не залежить від набору мікроорганізмів, що після m спостережень вчені гарантовано зможуть вивести набір із 5 швидкостей, з якими ростуть мікроорганізми.

Примітка. Завдання XXII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка будуть оприлюднені на сайті http://tym.in.ua/