Завдання XVI обласного турніру юних математиків 2020-2021 н.р.

1. Марійка та Миколка зіграли дві різні ігри з такими правилами: 1). Миколка називає просте число p. Після цього Марійка записує на дошці натуральне число n. Тоді Миколка дописує до цього числа справа одну чи декілька цифр 3 і виграє, якщо отримане таким чином число ділиться на p. В іншому разі – перемагає Марійка; 2). Миколка записує на дошці натуральне число n, а цифри 3 справа до нього дописує Марійка і виграє, якщо у такий спосіб їй вдасться отримати складене число. В іншому разі – перемагає Миколка.
   З яким рахунком закінчиться їхній спаринг за сумою двох ігор, якщо у кожній з них обоє прагнуть перемогти?
2. На площині розміщено 2020 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Шість гравців по черзі з'єднують ці точки відрізками, кожний олівцем свого кольору. За один раз дозволяється з'єднати довільні дві точки, які ще не були з'єднаними. Виграє той, хто першим отримає трикутник з вершинами у заданих точках, усі сторони якого мають однаковий колір. Кожен гравець прагне перемогти і при цьому намагається завадити здобути перемогу своїм суперникам. Чи обов'язково за цих умов вдасться виявити переможця такої гри?
3. Натуральні числа x та y задовольняють умову $23+x^2=24y^2$. Доведіть, що множина усіх пар таких чисел є нескінченною.
4. Число 20 записали 16 разів поспіль. Подайте отримане у такий спосіб 32-цифрове число як суму квадратів двох натуральних чисел та обґрунтуйте правильність свого представлення.
5. Назвемо елемент $k\in\left\{2^{20},\ 2^{20}+1,\ 2^{20}+2,\ ...,\ 2^{21}-1\right\}$ *особливим*, якщо в його записі у двійковій системі числення рівно 16 цифр не дорівнюють жодній із сусідніх з ними цифрам. Доведіть, що кількість особливих елементів такої множини ділиться на 17.
6. Числа Фібоначчі визначаються рівностями: $F_1=F_2=1,\ F_{n+2}=F_n+F_{n+1},\ n\geq 1$. Доведіть, що
$$F_{17}>\sqrt{\frac{F_{15}F_{16}+1}{16}}+15\cdot\sqrt[16]{F_1F_2...F_{15}}\,.$$
7. Для довільних натуральних чисел $a,\ b,\ c,\ d$ розв'яжіть нерівність $x<\dfrac{ax+b}{cx+d}$.
8. У рівнобедреному трикутнику ABC з кутом 100° при вершині B вибрали точку M таку, що $\angle MAC=30^\circ$, $\angle MCA=20^\circ$. Знайдіть величину кута BMC.
9. Два кола дотикаються зовнішнім чином. Коло радіуса R дотикається до обох із них у двох різних точках, які лежать на прямій, що проходить через їхні центри. Коло радіуса r дотикається до кожного з трьох попередніх кіл. Яких значень може набувати при цьому відношення $\dfrac{r}{R}$?
10. У гострокутному трикутнику ABC провели бісектрису AP та відмітили центр O описаного кола. Описане коло трикутника ABP вдруге перетинає пряму AC у точці X, описане коло трикутника ACP вдруге перетинає пряму AB у точці Y. Доведіть, що прямі XY та PO перпендикулярні.
11. Розріжте рівнобічну трапецію на три подібні між собою трапеції всіма можливими способами. Для рівнобічної трапеції з основами a та b і бічною стороною $c=1$ з'ясуйте необхідні та достатні умови реалізації кожного способу розрізання.

12. Чудний чоботар зшив 10 різних пар взуття, перемішав усі 20 чобіт між собою та розставив випадковим чином у ряд. Його педантична подруга переставляє взуття: за один раз вона може взяти будь-які два чоботи та обміняти їх місцями. За яку мінімальну кількість таких обмінів їй гарантовано вдасться досягти розташування, в якому кожна пара чобіт розташована поруч, причому ліворуч стоїть лівий чобіт пари, а праворуч — правий?

13. У клітинки квадрата 5×5 Петрик і Ганнуся по черзі (першим ходить Петрик) вписують цифри від 1 до 9. Квадрат називається *магічним*, якщо після заповнення всіх клітинок суми в усіх менших квадратах 3×3 належать діапазону [37; 53]. Петрик полюбляє магію і хоче зробити квадрат магічним. Чи вдасться Ганнусі йому завадити?

14. Двоє гравців та суддя грають у таку гру. Суддя випадково вибирає один із натуральних дільників числа n та називає його, а далі гравці по черзі множать останній названий дільник на 2, або множать на 5, або ж ділять на 10 – так, щоб отриманий результат був знову дільником числа n, який не називався раніше. Гравець, який не може зробити хід, програв. Яка ймовірність, що за правильної гри виграє перший гравець, якщо $n=10^6$?

15. Неперервна функція f є *кусково-лінійною*, тобто для деяких чисел $x_1<x_2<...<x_k$ вона є лінійною на кожному із проміжків $(-\infty;x_1]$, $[x_1;x_2]$, ... ,$[x_{k-1};x_k]$, $[x_k;+\infty)$. Для $k=3$ довести, що f можна єдиним чином подати у вигляді

$$f(x)=a_1|x-x_1|+a_2|x-x_2|+a_3|x-x_3|+a_4x+a_5,\quad x\in\mathrm{R},$$

де a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – деякі дійсні числа.

16. Числова множина A називається замкненою відносно операції множення, якщо добуток двох довільних елементів цієї множини також належить A. З тотожності Брамагупти $(x^2+ry^2)(z^2+rt^2)=(xz+ryt)^2+r(xt-yz)^2=(xz-ryt)^2+r(xt+yz)^2$ випливає замкнутість множини чисел вигляду x^2+ry^2. Нехай p, r, x, y – цілі числа. Для фіксованих p та r дослідіть на замкнутість відносно операції множення множини чисел вигляду px^2+ry^2.

17. Доведіть, що існує безліч пар (x,y) додатних раціональних чисел, що задовольняють рівняння $x^y=(2y)^x$.

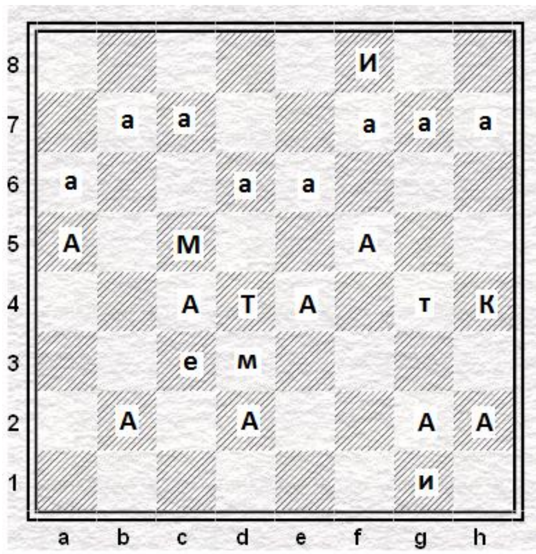
18. Для усіх натуральних чисел n доведіть нерівність $\sqrt{1^3+\sqrt{2^3+...+\sqrt{n^3}}}<3$.

19. Доведіть, що

$$\left(2^b-2^a\right)\left(3^b-3^a\right)<\frac{b-a}{2}\left(6^b-6^a\right)$$

для усіх $a<b$.

20. У шаховому ребусі «*МАТЕМАТИКА*» кожна літера відповідає певному типу фігури: 6 літер – 6 різних типів фігур. Великі літери – фігури одного кольору, малі – фігури іншого кольору. Визначте позицію та останній хід.



Завдання XXIII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка будуть оприлюднені на сайті http://tym.in.ua/ .