Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти
LIII Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики

III етап

Вказівки та відповіді

7 клас. Рівень «А»

1. Знайдіть усі такі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, для яких виконується рівність $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=2013$.

Розв'язання. З умови маємо рівність $1111a+111b+11c+d=2013$. Ураховуючи, що цифри не перевищують 9, послідовно однозначно отримуємо: $a=1$, $b=8$, $c=1$, $d=3$.

Відповідь: $\overline{abcd}=1813$.

2. Серед 25 монет є рівно 2 фальшиві. Є чарівна скринька, в яку можна покласти 2 монети, і вона покаже кількість фальшивих монет у цій парі. Покажіть, як можна визначити обидві фальшиві монети не більше, ніж за 13 таких операцій.

Розв'язання. Відокремимо три монети **A**, **B**, **C**. Решту монет розіб'ємо на пари і зробимо 11 *вимірів* для цих пар. При цьому якщо скринька показала «2», то фальшиві монети визначено. Розглядаємо інші випадки.

Випадок 1. Якщо скринька для всіх 11 вимірів показала «0», то серед монет **A**, **B**, **C** дві фальшиві. Далі ми покладемо до скриньки **A** і **B**, а потім **A** і **C**. Якщо скринька обидва рази показує «1», то фальшивими є **B** і **C**, в іншому випадку хоча б один раз скринька покаже «2».

Випадок 2. Скринька один раз показала «1», і нехай це було для пари монет **D** і **E**. Тоді ще перевіряємо **D** і **A**, а також **D** і **B**. Для показників «0» і «0» фальшивими будуть **E** і **C**, для «0» і «1» — **E** і **B**, для «1» і «0» — **E** і **A**, для «1» і «1» — монети **D** і **C**.

Випадок 3. Скринька два рази показала «1», і нехай це було для пар монет **D** і **E**, **F** і **G**. Тоді ще перевіряємо **D** і **F**, а також **D** і **G**. Для показників «0» і «1» фальшивими будуть **E** і **G**, для «1» і «0» — **E** і **F**. Інші ситуації або неможливі, або ж для них скринька покаже значення «2».

3. Петрик послідовно виписує в рядок на дошці остачі від ділення деякого натурального числа n на 10, 11, 12, … , 20. Виявилося, що кожне наступне записане число більше за попереднє. Доведіть, що в рядку записано 11 *послідовних* цілих чисел (тобто кожне наступне число більше за попереднє на 1).

Розв'язання. Остачі від ділення числа n на 10 і 20 або співпадають, або відрізняються на 10 (це випливає з рівностей $n=10q+r$, $n=20q_1+r_1$, де $0\le r\le 9$, $0\le r_1\le 19$). Перший випадок неможливий. У другому випадку між цими остачами буде 9 інших остач, і це мають бути послідовні натуральні числа.

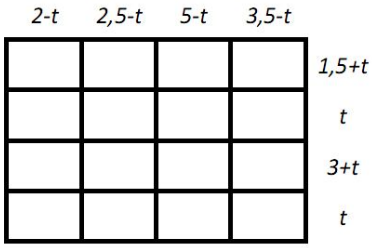
Зауваження. Потрібну умову задовольняють усі числа $n\equiv -9\pmod M$, де M — найменше спільне кратне чисел $10, 11, \ldots, 19, 20$.

4. Прямокутне приміщення розділене на 16 прямокутних кімнат. Комендант виміряв периметри восьми кімнат. Сім з восьми результатів його вимірювань *схематично* (тобто без урахування справжніх розмірів кімнат) показано на малюнку праворуч, а результат восьмого позначено через x. Знайдіть значення x.

7		13	
		10	7
10	11		
	5		*x*

E		*C*	
		G	*D*
A	*F*		
	B		*H*

Розв’язання. Помітимо, що периметр усього приміщення дорівнює як сумі периметрів прямокутників, у яких записані літери A, B, C, D, так і сумі периметрів прямокутників, що містять літери E, F, G, H. Тому $10+5+13+7=7+11+10+x$.



Відповідь: $x=7$.

Зауваження. Такі ситуації можливі. Усі вони зображені на рисунку праворуч ($t \in (0;2)$ — довільне).

5. З картону вирізано декілька прямокутників. На площині намальовано квадрат, сторона якого не менша за будь-яку сторону кожного з прямокутників, а периметр не менший за суму периметрів прямокутників. Доведіть, що всі вирізані прямокутники можна без *перекриттів* розмістити в намальованому квадраті (тобто будь-які два прямокутники можуть мати тільки такі спільні точки, які лежать на їхніх сторонах, і точки жодного з прямокутників не можуть вийти за межі квадрата).

Розв’язання. У кожного прямокутника відмітимо найменшу сторону. Сума відмічених сторін не більша за чверть суми периметрів прямокутників, тому не більша за сторону квадрата. Отже, досить усі прямокутники викласти один за одним, приклавши їх «короткими» сторонами до однієї із сторін квадрата.

7 клас. Рівень «Б»

1. Див. задачу 1 рівня «А», 7 клас.

2. Серед 25 монет є рівно 2 фальшиві. Є чарівна скринька, в яку можна покласти 2 монети, і вона покаже кількість фальшивих монет у цій парі. Покажіть, як можна визначити обидві фальшиві монети не більше, ніж за 14 таких операцій.

Розв’язання. Відокремимо монету **A**. Решту монет розіб’ємо на пари і зробимо 12 *вимірів* для цих пар. При цьому якщо скринька хоч раз покаже «2», то фальшиві монети визначено. Розглядаємо інші випадки.

Випадок 1. Скринька один раз показала «1», нехай це було в парі монет B і C. Тоді A фальшива, ще вимірюємо B і A, і за отриманим показником визначаємо, яка з монет B і C є другою фальшивою.

Випадок 2. Скринька два рази показала «1», нехай це було для пар монет **B** і **C**, **D** і **E**. Тоді ще перевіряємо пару **B** і **D**, а також пару **B** і **E**. Для показників «0» і «1» фальшивими будуть монети **C** і **E**, для «1» і «0» — монети **B** і **E**. Інші ситуації або неможливі, або ж для них скринька покаже значення «2».

Зауваження. Також можна використати алгоритм, описаний у розв'язанні задачі 2 рівня «А».

3. Андрій, Микола, Олена, Сергій і Дарина посіли п'ять перших місць на математичній олімпіаді (жодне з місць не було розділено між декількома учасниками). Кожен з них знає, яке місце він зайняв. Олена знає, що різниця місць Сергія й Андрія (у вказаному порядку) дорівнює двом. Також вона знає, що Дарина зайняла не перше місце, і тому Олена може відновити розподіл місць між цією п'ятіркою учасників олімпіади. Яке місце зайняла Дарина?
Розв'язання. Андрій і Сергій посіли, відповідно, або місця 1 і 3, або місця 2 і 4, або місця 3 і 5. Якщо Олена зайняла місце 3, то Андрій і Сергій отримали місця 2 і 4, а Дарина — місце 5. Якщо місце Олени відмінне від третього, то є два варіанти місць Андрія і Сергія, у кожному з яких Олена може мати місце, відмінне від першого, і тому Олена не може однозначно визначити розподіл місць для цієї п'ятірки учнів.
Відповідь: п'яте місце.

4. Див. задачу 3 рівня «А», 7 клас.

5. Див. задачу 4 рівня «А», 7 клас.

8 клас. Рівень «А»

1. Чебурашка та Крокодил Гена з'їли торт. Чебурашка їв удвічі повільніше за Крокодила Гену, але почав їсти на хвилину раніше. З'ясувалося, що вони з'їли порівну. За який час Чебурашка сам з'їв би цей торт?

Розв'язання. За першу хвилину Чебурашка мав з'їсти стільки ж, скільки з'їв одночасно з Крокодилом Геною. Усього він з'їв половину торта, тому за хвилину він з'їв одну четверту частину торта.

Відповідь: за 4 хвилини.

2. Відомо, що трицифрове число $\overline{mnk}$ на 1 більше за трицифрове число $\overline{abc}$. Доведіть, що число $\overline{abcmnk}$ не може ділитися без остачі на 13.

Розв'язання. Маємо: $\overline{abcmnk} = 1000\overline{abc} + \overline{mnk} = 1000\overline{abc} + \overline{abc} + 1 = 1001\overline{abc} + 1$. Оскільки 1001 ділиться без остачі на 13, то $\overline{abcmnk}$ на 13 не ділиться.

3. На дошці написані числа 1, 2, 3, ... , 4027, 4028. Миколка та Андрійко по черзі закреслюють числа, причому Миколка ходить першим. За один хід можна закреслити тільки одне з раніше незакреслених чисел. Андрійко хоче, щоб після його 2013-го ходу на дошці залишилися два *послідовні* числа (тобто числа, різниця яких дорівнює 1). Чи завжди він зможе цього досягти?

Розв'язання. Розіб'ємо числа на 2014 пар: $(1,2)$, $(3,4)$, … , $(4027,4028)$. Якщо Миколка своїм ходом закреслює число однієї з пар, то Андрійко відповідає закресленням іншого числа в тій же самій парі. Після 2013-го ходу Андрійка залишаються два числа з однієї пари.

Відповідь: так, зможе.

4. Знайдіть усі пари простих чисел p і q, для яких число $p^3 + q^2$ є кубом деякого натурального числа.

Розв'язання. Нехай $p^3 + q^2 = n^3$, тоді $q^2 = n^3 - p^3 = (n-p)\left(n^2 + np + p^2\right)$.

Оскільки число q просте і $n - p < n^2 + np + p^2$, маємо $n - p = 1$, і

$$q^2 = 3p^2 + 3p + 1 \quad (*),$$

$$(q-1)(q+1) = 3p^2 + 3p.$$

Тому $q-1$ або $q+1$ ділиться без остачі на просте число p. Але ж з рівності $(*)$ знаходимо, що

$$(p+1)^2 < q^2 < (2p+1)^2,\ p+1 < q < 2p+1,\ p < q-1 < 2p,\ p+2 < q+1 < 2p+2.$$

Отже, $q-1$ не буде ділитись без остачі на p, і кратним p буде число $q+1$. З останньої нерівності випливає, що можливим є тільки випадок $q+1 = 2p$, тобто $q = 2p-1$. Підставляючи $q = 2p-1$ до (*), отримуємо: $p = 7$, $q = 13$.

Відповідь: $p = 7$, $q = 13$.

5. У гострокутному трикутнику ABC проведено бісектриси AA_1 і BB_1. Відомо, що на відрізку CB_1 існує така точка M, що $CM = CA_1$. Через точку M проведено пряму, паралельну BB_1, яка перетинає пряму AB в точці N. Доведіть, що $A_1N = A_1M$.

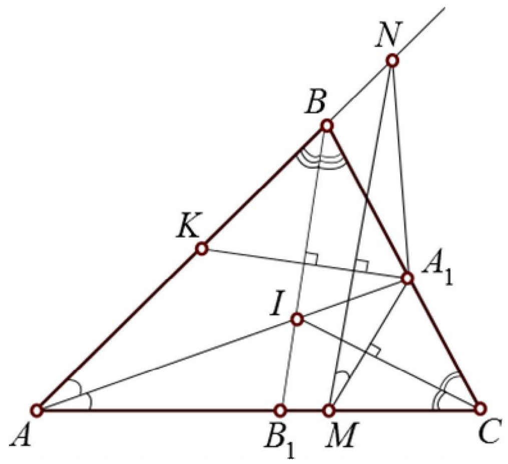
Розв'язання. Позначимо через I точку перетину бісектрис і проведемо $A_1K \perp BB_1$ (див. рис.). Тоді трикутники BA_1K і CA_1M рівнобедрені.
Отже,

$$\angle BA_1K = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC,\ \angle CA_1M = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\angle MA_1K = 180° - \angle BA_1K - \angle CA_1M = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC.$$

За умовою, $MN \parallel BB_1$, тому $MN \perp A_1K$, і

$$\angle NMA_1 = 90° - \angle MA_1K = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle A_1AM.$$



Відтак, точки A, M, A_1, N лежать на одному колі, і $A_1N = A_1M$ як хорди цього кола, на які спираються рівні вписані кути.

8 клас. Рівень «Б»

1. Див. задачу 1 рівня «А», 8 клас.

2. Керівник математичного гуртка дав учням завдання виписати в порядку зростання всі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, в яких $1 \le a < b < c < d \le 9$. Яке число буде записаним на 53-му місці?

Розв'язання. Перші 6 чисел — це 1234, 1235, …, 1239, наступні 5 чисел — 1245, … , 1249, далі маємо 4 числа вигляду $\overline{125d}$, 3 числа вигляду $\overline{126d}$, 2 числа вигляду $\overline{127d}$, і 21-м буде число 1289. Аналогічно, з комбінації цифр **13** буде починатись $5+4+3+2+1=15$ чисел, з комбінації цифр **14** — $4+3+2+1=10$ чисел, з комбінації цифр **15** — $3+2+1=6$ чисел. Отже, на 53-му місці буде число 1678.
Відповідь: 1678.

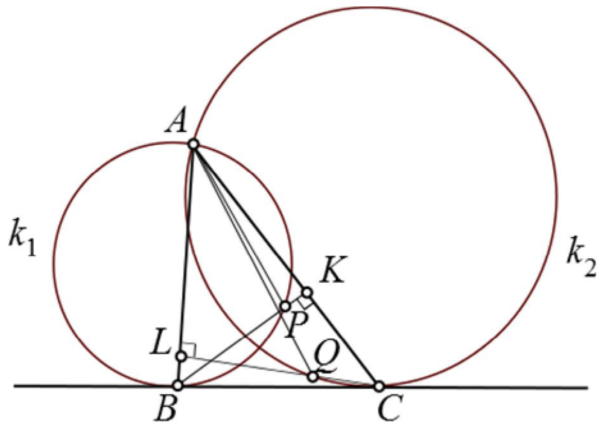
3. Див. задачу 3 рівня «А», 8 клас.

4. Дано гострокутний трикутник ABC. Кола k_1 і k_2 проходять через вершину A і дотикаються до прямої BC в точках B і C відповідно. Висота BK трикутника ABC перетинає коло k_1 у точці P, відмінній від B, а висота CL перетинає коло k_2 в точці Q, відмінній від C. Доведіть, що точки A, P і Q лежать на одній прямій.

Розв'язання. Нехай $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ — кути трикутника ABC. Тоді, використовуючи теорему про суму кутів трикутника й теорему про кут між дотичною та хордою, одержимо:

$$\angle CAP = \alpha - \angle BAP = \alpha - \angle CBP = \alpha - \angle CBK = \alpha - (90^\circ - \gamma) =$$
$$= \alpha + \gamma - 90^\circ = 90^\circ - \beta = \angle BCL = \angle BCQ = \angle CAQ,$$

тобто $\angle CAP = \angle CAQ$.



Оскільки точки P і Q лежать по один бік від прямої AC, то точки A, P і Q лежать на одній прямій.

5. Див. задачу 4 рівня «А», 8 клас.

9 клас. Рівень «А»

1. Відомо, що $a \neq b$ та рівняння $ax^{2013} + x^{2012} + b = 0$ і $bx^{2013} + x^{2012} + a = 0$ мають спільний дійсний корінь. Знайдіть $a + b$.

Розв'язання. Нехай x_0 — спільний корінь цих рівнянь. Тоді

$$ax_0^{2013} + b = bx_0^{2013} + a, \ (a-b)x_0^{2013} = a - b.$$

Оскільки $a \neq b$, то $x_0 = 1$. Отже, $a + b = -1$.

Відповідь: -1.

2. Знайдіть усі такі пари простих чисел p і q, для яких має місце рівність

$$p^5 - (4p - q)^2 = 2q^2.$$

Розв'язання. Запишемо вихідну рівність у вигляді $p\left(p^4 - 16p + 8q\right) = 3q^2$. Отже, $3q^2 \vdots p$. Звідси випливає, що $p = 3$ або $q = p$. Для $q = p$ маємо: $p^4 - 8p = 3p$, $p^3 = 11$, що неможливо. Якщо $p = 3$, то $q^2 - 8q - 33 = 0$, $q = -3$, $q = 11$.

Відповідь: $p = 3$, $q = 11$.

3. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел a, b і c виконується нерівність

$$3a^2 + b^2 + c^2 + bc \geq 3a(b + c).$$

Розв'язання. Оскільки для всіх дійсних x і y

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 + x^2 + y^2\right) \geq 0,$$

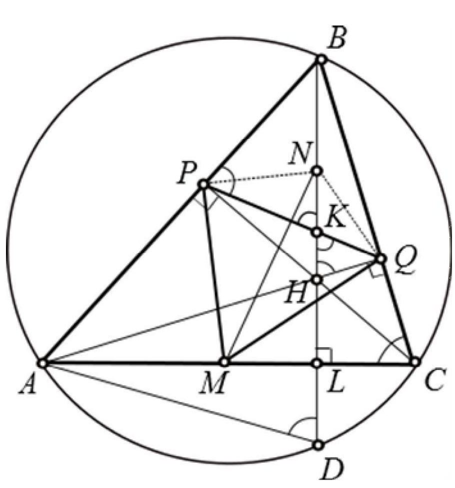
то $(a-b)^2 + (a-b)(a-c) + (a-c)^2 \geq 0$, звідки випливає потрібна нерівність.

Зауваження. Наведемо інший спосіб доведення нерівності. Розглянемо вираз $3a^2 + 3(b+c)a + \left(b^2 + c^2 + bc\right)$ як квадратний тричлен відносно a. Його дискримінант

$$3\left(3(b+c)^2 - 4\left(b^2 + c^2 + bc\right)\right) = -3(b-c)^2 \leq 0,$$

і тому наш вираз для всіх a, b і c набуває тільки невід'ємних значень.

4. Нехай H — точка перетину висот AQ, BL і CP гострокутного трикутника ABC, K — спільна точка відрізків PQ і BH, M — середина сторони AC, N — середина відрізка BH. Промінь BL перетинає описане коло трикутника ABC в точці D, відмінній від B. Відомо, що $KQ = HQ$. Доведіть, що прямі MN і AD перпендикулярні.



Розв'язання. Точка M — середина спільної гіпотенузи AC прямокутних трикутників PAC і QAC, тому $PM = QM$. Аналогічно, точка N —

середина спільної гіпотенузи BH прямокутних трикутників PBH і QBH, звідки $PN = QN$. Отже, $PQ \perp MN$. Залишається довести, що $PQ \parallel AD$, тобто $\angle BKP = \angle BDA$. Навколо чотирикутника $PBQH$, в якому $\angle P = \angle Q = 90°$, можна описати коло, і тому $\angle QHB = \angle QPB$. Далі, чотирикутник $ACQP$ також є вписаним, і $\angle ACQ = 180° - \angle APQ = \angle BPK$. З урахуванням рівностей $\angle QHB = \angle QKH = \angle BKP$, $\angle BDA = \angle ACQ$ маємо потрібний результат.

Зауваження. Як добре відомо, точки H і D симетричні відносно прямої AC. Тому $\angle ADH = \angle AHD = \angle QHK = \angle QKH$, звідки випливає паралельність прямих PQ і AD.

5. Керівник математичного гуртка намалював на дошці таблицю розміру 30×30 і запропонував учням заповнити її числами 1, 2, … , 900, записуючи щосекунди в якусь порожню клітинку на свій розсуд одне з тих чисел, що не використовувалось раніше. Чи зможуть учні виконати завдання так, щоб у будь-який момент ані в жодному рядку, ані в жодному стовпці сума всіх записаних чисел не давала остачу 1 від ділення на 3?

Розв'язання. Доведемо, що це можливо. Серед чисел 1, 2, … , 900 остачу 1 від ділення на 3 дають 300 чисел, остачу 2 дають також 300 чисел, і 300 чисел є кратними 3. Розіб'ємо таблицю на 225 квадратів розміру 2×2. Візьмемо спочатку 150 квадратів. У кожному з них спочатку на одній діагоналі записуємо два числа, що дають остачу 2 від ділення на 3, після чого на другій його діагоналі — два числа, що дають остачу 1 від ділення на 3. Решту 75 квадратів довільно заповнюємо числами, які діляться на 3 без остачі.

Відповідь: так, зможуть.

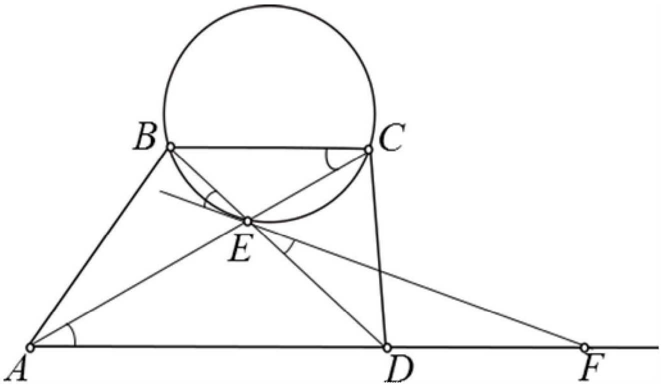
9 клас. Рівень «Б»

1. Сума двох натуральних чисел дорівнює 20132013, і якщо в одному з них закреслити останню цифру, то отримаємо друге число. Знайдіть усі такі пари чисел.

Розв'язання. Нехай n — менше з цих чисел, а x, $0 \le x \le 9$, — закреслена цифра в більшому з чисел. Тоді $n + 10n + x = 20132013$, $11n + x = 20132013$. Оскільки $20132013 \vdots 11$, то $x = 0$, $n = 1830183$.

Відповідь: 1830183, 18301830.

2. Див. задачу 1 рівня «А», 9 клас.



3. У трапеції $ABCD$ з основами AD і BC, $AD > BC$, діагоналі AC і BD перетинаються в точці E. Дотична до описаного кола трикутника BCE, проведена в точці E, перетинає пряму AD в точці F так, що точка D лежить між точками A і F. Відомо, що $AF = a$, $AD = b$. Знайдіть довжину відрізка EF.

Розв'язання. Трикутники AEF і EDF подібні, бо вони мають спільний кут F, і $\angle FAE = \angle ACB = \angle FED$ (ми використали той факт, що кут між дотичною EF і хордою BE дорівнює вписаному куту BCE). З подібності цих трикутників випливає пропорція $\frac{AF}{EF} = \frac{EF}{DF}$. Отже, $EF^2 = AF \cdot DF = a(a-b)$.

Відповідь: $\sqrt{a(a-b)}$.

4. Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел x, y і z має місце нерівність

$$\frac{x(y-x)}{x+y} + \frac{y(z-y)}{y+z} \le \frac{z-x}{2}.$$

Розв'язання. Запишемо цю нерівність у вигляді

$$\frac{x(y-x)}{x+y} + \frac{y(z-y)}{y+z} \le \frac{z-y}{2} + \frac{y-x}{2}.$$

Маємо:

$$\frac{x(y-x)}{x+y} \le \frac{y-x}{2} \Leftrightarrow (y-x)\left(\frac{x}{x+y} - \frac{1}{2}\right) \le 0 \Leftrightarrow (y-x)(x-y) \le 0 \Leftrightarrow -(x-y)^2 \le 0.$$

Аналогічно доводиться нерівність

$$\frac{y(z-y)}{y+z} \le \frac{z-y}{2}.$$

З доведених нерівностей випливає потрібна.

5. Див. задачу 5 рівня «А», 9 клас.

10 клас. Рівень «А»

1. Розв’яжіть рівняння

$$x^{2013}-x^{2014}=\left\{\frac{2015+x}{1+[x]}\right\}$$

(тут $[a]$ — ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a; $\{a\}=a-[a]$ — дробова частина числа a).

Розв’язання. З необхідністю, $x^{2013}(1-x)\ge 0$, тобто $0\le x\le 1$. Неважко бачити, що $x=0$ та $x=1$ є коренями рівняння.
Для $x\in(0;1)$ $[x]=0$, $\{2015+x\}=\{x\}=x$, $x^{2013}<x+x^{2014}$.
Відповідь: $x=0$, $x=1$.

2. Натуральне число a має рівно 6 різних натуральних дільників (включаючи 1 і саме число a). Аналогічно, натуральне число b має рівно 9 різних натуральних дільників, а натуральне число c має рівно 14 різних натуральних дільників. Відомо, що $\text{НСД}(a,b,c)=10$. Знайдіть усі можливі значення добутку $\text{НСД}(a,b)\cdot\text{НСД}(b,c)\cdot\text{НСД}(c,a)$. (Тут $\text{НСД}(x,y)$ — найбільший спільний дільник натуральних чисел x і y, $\text{НСД}(a,b,c)$ — найбільший спільний дільник натуральних чисел a, b і c.)

Розв’язання. Нагадаємо, що якщо $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{\alpha_m}$ — *канонічний* розклад натурального числа $n>1$, то кількість $\tau(n)$ усіх його натуральних дільників (включаючи 1 та саме число n) знаходиться за формулою $\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_m+1)$. Число m називається *довжиною* канонічного розкладу. Оскільки $6=2\cdot 3$, $9=3\cdot 3$, $14=2\cdot 7$, то, як легко бачити, довжина канонічного розкладу кожного з чисел a, b і c дорівнює 2. Числа a, b і c діляться без остачі на 10. Звідси $b=2^2\cdot 5^2$, $a=2^1\cdot 5^2$ або $a=2^2\cdot 5^1$, $c=2^1\cdot 5^6$ або $c=2^6\cdot 5^1$. З урахуванням умови $\text{НСД}(a,b,c)=10$ знаходимо, що можливими є тільки такі випадки:

$$a=2^1\cdot 5^2,\ b=2^2\cdot 5^2,\ c=2^6\cdot 5^1;$$
$$a=2^2\cdot 5^1,\ b=2^2\cdot 5^2,\ c=2^1\cdot 5^6.$$

Для обох цих випадків $\text{НСД}(a,b)\cdot\text{НСД}(b,c)\cdot\text{НСД}(c,a)=2^4\cdot 5^4=10000$.
Відповідь: 10000.

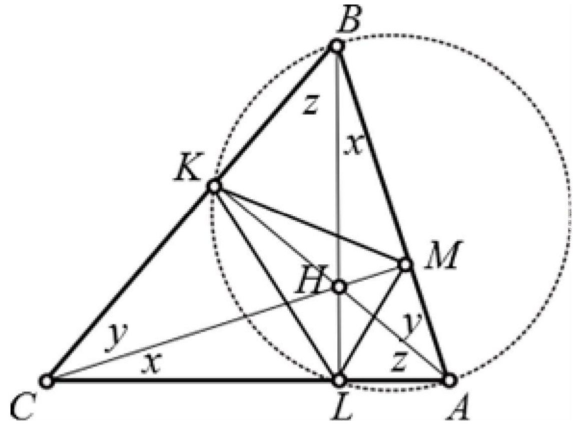
3. Відомо, що додатні дійсні числа x, y і z задовольняють нерівність $3x+4y+6z\le 12$. Доведіть, що $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le 3$.

Розв’язання. Оскільки $3x+4y+6z\le 12$, то $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}\le 1$. Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{\frac{x}{4}}\cdot\sqrt{4}+\sqrt{\frac{y}{3}}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{\frac{z}{2}}\cdot\sqrt{2}\le\sqrt{\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}}\cdot\sqrt{4+3+2}\le\sqrt{1}\cdot\sqrt{9}=3.$$

4. Нехай AK, BL і CM — висоти гострокутного трикутника ABC. Відомо, що $LM=5$ см, $MK=12$ см, $KL=13$ см. Обчисліть площу трикутника ABC.

Розв'язання. Оскільки $\dfrac{AL}{AB}=\cos\angle A=\dfrac{AM}{AC}$, то трикутник ALM подібний трикутнику ABC з коефіцієнтом $\cos\angle A$. Аналогічно, трикутнику ABC подібні й трикутники BMK і CKL з коефіцієнтами $\cos\angle B$ і $\cos\angle C$ відповідно.



Тому

$$S_{MKL}=S_{ABC}-S_{ALM}-S_{BMK}-S_{CKL}=$$
$$=S_{ABC}-\cos^2\angle A\cdot S_{ABC}-\cos^2\angle B\cdot S_{ABC}-\cos^2\angle C\cdot S_{ABC}=$$
$$=\left(1-\cos^2\angle A-\cos^2\angle B-\cos^2\angle C\right)S_{ABC}.$$

Легко встановити, що трикутник MKL прямокутний, $\angle KML=90°$, а тому $S_{MKL}=30$ см^2.

Коло з діаметром AB проходить через точки K і L, оскільки $\angle AKB=\angle ALB=90°$. Отже, $\angle AKL=\angle ABL=x=90°-\angle A=\angle ACM$. Аналогічні співвідношення одержуємо для кутів x, y і z, відмічених на рисунку. Із прямокутних трикутників ALB, BKA і CLB одержуємо:

$$1-\cos^2\angle A-\cos^2\angle B-\cos^2\angle C=1-\sin^2 x-\sin^2 y-\sin^2 z=$$
$$=1-\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1-\cos 2y}{2}-\frac{1-\cos 2z}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z-1\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\angle MKL+\cos\angle KLM+\cos\angle LMK-1\right)=\frac{2}{13}.$$

Отже, $S_{ABC}=195$ см^2.

Відповідь: 195 см^2.

5. По колу записали 672 натуральних числа a_1, a_2, … , a_{672}, серед яких немає жодних двох рівних, причому відомо, що $a_1+a_2+...+a_{672}=2013$, і $a_k\ne 1342$ для всіх k, $1\le k\le 672$. Доведіть, що завжди можна вибрати декілька записаних поспіль чисел, сума яких дорівнює 1342.

Розв'язання. Розіб'ємо деяке коло 2013 точками на 2013 рівних дуг. Серед цих точок відмітимо 672 точки M_0, $M_1, \dots, M_{671}$ так, щоб кожна з дуг M_iM_{i+1}, $i \le 0 \le 671$, виявилась розбитою на a_{i+1} рівих дуг (вважаємо, що $M_{672} \equiv M_0$). Точки M_0, $M_1, \dots, M_{671}$ пофарбуємо в чорний колір, а решту — $2013 - 672 = 1341$ точку — пофарбуємо в білий. Зауважимо, що 2013 ділиться без остачі на 3. Розглянемо всі такі рівносторонні трикутники з вершинами в наших 2013 точках (кожен рівносторонній трикутник з вершинами в наших 2013 точках однозначно визначається будь-якою своєю вершиною), які мають хоча б одну чорну вершину. Якби в кожного з них дві інші вершини були білі, то загалом білих точок було б не менше, ніж $2 \cdot 672 = 1344$, що неможливо, бо їх 1341. Тому знайдеться рівносторонній трикутник, у якого є дві чорні вершини. Менша дуга з кінцями в цих вершинах буде розбитою на 671 рівну частина, а більша складається з декількох дуг (щонайменше — з двох) з чорними кінцями, причому сумарно ці дуги складаються саме з 1342 рівних частин (з тих 2013 частин, на які розбито коло). Числа з набору a_1, $a_2, \dots, a_{672}$, які відповідають цим дугам, є шуканими.

10 клас. Рівень «Б»

1. Чи можна зобразити на прямій шість відрізків так, щоб серед будь-яких трьох зображених відрізків знайшлися принаймні два, які мають хоча б одну спільну точку, і кожна точка прямої належала щонайбільше трьом зображеним відрізкам? (Вважається, що кінці відрізків належать самим відрізкам.)

Розв'язання. Умову задовольняють відрізки $[0;1]$, $[0;2]$, $[0;3]$, $[2;5]$, $[3;5]$ і $[4;5]$.

Відповідь: так, можна.

2. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел m і n, для яких виконується рівність $mn - \sqrt{m^2+n^2} = 7$.

Розв'язання. Число $\sqrt{m^2+n^2} = mn - 7$ є натуральним. Отже,

$$mn = \sqrt{m^2+n^2} + 7,\ 2mn = 2\sqrt{m^2+n^2} + 14,$$

$$m^2 + n^2 + 2mn = m^2 + n^2 + 2\sqrt{m^2+n^2} + 14,\ (m+n)^2 - \left(\sqrt{m^2+n^2} + 1\right)^2 = 13,$$

$$\left(m + n - \sqrt{m^2+n^2} - 1\right)\left(m + n + \sqrt{m^2+n^2} + 1\right) = 13.$$

Оскільки число 13 просте, і числа в дужках останньої рівності (яка, зауважимо, рівносильна рівності з умови задачі) є натуральними, причому

$$m + n - \sqrt{m^2+n^2} - 1 < m + n + \sqrt{m^2+n^2} + 1,$$

то

$$\begin{cases} m + n - \sqrt{m^2+n^2} - 1 = 1, \\ m + n + \sqrt{m^2+n^2} + 1 = 13. \end{cases}$$

Розв'язавши систему цих рівнянь, знаходимо відповідь.

Відповідь: $m = 3$, $n = 4$; $m = 4$, $n = 3$.

3. Відомо, що додатні дійсні числа x і y задовольняють нерівність $2x + 7y \le 14$. Доведіть, що $\sqrt{x} + \sqrt{y} \le 3$.

Розв'язання. Оскільки $2x + 7y \le 14$, то $\frac{x}{7} + \frac{y}{2} \le 1$. Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\frac{x}{7}} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{\frac{y}{2}} \cdot \sqrt{2} \le \sqrt{\frac{x}{7} + \frac{y}{2}} \cdot \sqrt{7 + 2} \le \sqrt{1} \cdot \sqrt{9} = 3.$$

4. Див. задачу 4 рівня «А», 9 клас.

5. Див. задачу 5 рівня «А», 10 клас.

11 клас. Рівень «А»

1. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок, координати яких задовольняють рівність $\sin x + \cos y = \sin y + \cos x$.

Розв'язання. Маємо:

$$(\sin x - \sin y) + (\cos y - \cos x) = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} + 2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{x-y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{\pi+x+y}{2}\right) = 4\sin\frac{x-y}{2}\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}.$$

Звідки випливає, що треба зобразити дві сукупності паралельних прямих:

$$y = x + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z};\ y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}.$$

2. Для $x \in (0;1)$ та $y \in (0;1)$ знайдіть найбільше можливе значення виразу

$$\frac{xy(1-x-y)}{(x+y)(1-x)(1-y)}.$$

Розв'язання. Для $x = y = \frac{1}{3}$ значення цього виразу дорівнює $\frac{1}{8}$. Доведемо, що шуканим найбільшим значенням є саме $\frac{1}{8}$.

Якщо $x + y \geq 1$, то

$$\frac{xy(1-x-y)}{(x+y)(1-x)(1-y)} \leq 0.$$

Нехай $x + y < 1$. Позначимо $z = 1 - x - y$. Тоді потрібно довести, що

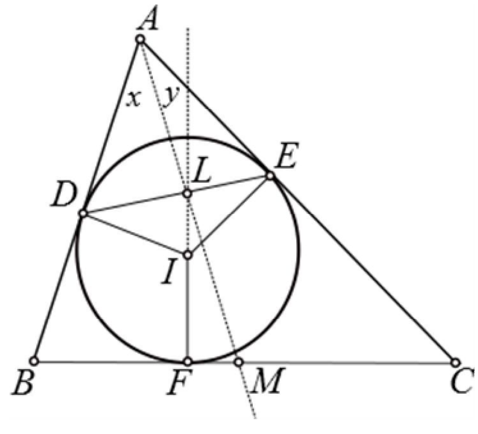
$$xyz \leq \frac{1}{8}(x+y)(y+z)(x+z).$$

Дана нерівність одержується з нерівностей

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2},\ \sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2},\ \sqrt{xz} \leq \frac{x+z}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{8}$.

3. Нехай вписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін AB, AC і BC в точках D, E і F відповідно. Пряма, яка проходить через точку F і центр цього кола, перетинає відрізок DE в точці L. Доведіть, що пряма AL проходить через середину сторони BC.



Розв'язання. Позначимо $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Нехай пряма AL перетинає сторону BC в точці M.

Легко бачити, що $\angle DIL = 180° - \angle DIF = \beta$. Аналогічно, $\angle EIL = \gamma$.
За теоремою синусів,

$$\frac{DL}{DI} = \frac{\sin \angle DIL}{\sin \angle DLI} = \frac{\sin \beta}{\sin \angle DLI},\ \frac{EL}{EI} = \frac{\sin \angle EIL}{\sin \angle ELI} = \frac{\sin \gamma}{\sin \angle DLI},$$

звідки

$$\frac{DL}{EL} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma},$$

оскільки $DI = EI$ як радіуси вписаного кола.
Далі, з урахуванням рівностей $\sin \angle AMB = \sin \angle AMC$, $AD = AE$, за теоремою синусів знаходимо

$$\frac{BM}{CM} = \frac{AB \sin x}{AC \sin y},\ \frac{DL}{EL} = \frac{AD \sin x}{AE \sin y} = \frac{\sin x}{\sin y}.$$

Нарешті,

$$\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{DL}{EL} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 1,$$

що й потрібно довести.

4. Знайдіть усі такі визначені на множині всіх дійсних чисел числові функції f, що для будь-яких $x \in \mathbf{R}$ і $y \in \mathbf{R}$ має місце рівність

$$f\left(xf\left(y\right)\right) + f\left(y + f\left(x\right)\right) - f\left(x + yf\left(x\right)\right) = x.$$

Розв'язання.
Крок 1. Нехай $x = 0$, $y = 0$.
Тоді $f\left(0\right) + f\left(f\left(0\right)\right) - f\left(0\right) = 0$, тобто $f\left(f\left(0\right)\right) = 0$.
Крок 2. Нехай $x = 1$, $y = 1$.
Тоді $f\left(f\left(1\right)\right) + f\left(1 + f\left(1\right)\right) - f\left(1 + f\left(1\right)\right) = 1$, тобто $f\left(f\left(1\right)\right) = 1$.
Крок 3. Нехай $x = 1$, $y = 0$.
Тоді $f\left(f\left(0\right)\right) + f\left(f\left(1\right)\right) - f\left(1\right) = 1$, тобто $f\left(1\right) = 0$.
Крок 4. Із рівності $f\left(1\right) = 0$ випливає, що $f\left(f\left(1\right)\right) = f\left(0\right)$, тобто $f\left(0\right) = 1$.
Крок 5. Нехай x — довільне, $y = 0$.
Тоді $f\left(xf\left(0\right)\right) + f\left(f\left(x\right)\right) - f\left(x\right) = x$, $f\left(x\right) + f\left(f\left(x\right)\right) - f\left(x\right) = x$, і маємо, що для всіх $x \in \mathbf{R}$ $f\left(f\left(x\right)\right) = x$.
Крок 6. Нехай $x = 1$, y — довільне.
Тоді, з урахуванням рівності $f\left(1\right) = 0$, одержуємо:

$$f\left(f\left(y\right)\right) + f\left(y + f\left(1\right)\right) - f\left(1 + yf\left(1\right)\right) = 1,\ f\left(f\left(y\right)\right) + f\left(y\right) = 1,$$
$$f\left(y\right) = 1 - f\left(f\left(y\right)\right),\ f\left(y\right) = 1 - y.$$

Крок 7. Безпосередньою перевіркою переконуємось, що функція $f\left(x\right) = 1 - x$ задовольняє умову задачі.
Відповідь: $f\left(x\right) = 1 - x$, $x \in \mathbf{R}$.

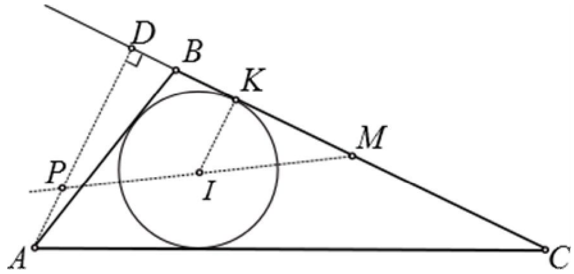
5. Див. задачу 5 рівня «А», 10 клас.

11 клас. Рівень «Б»

1. Див. задачу 1 рівня «А», 11 клас.

2. Див. задачу 1 рівня «А», 10 клас.

3. У трикутнику ABC $AB = 16$ см, $BC = 25$ см, $AC = 39$ см. Пряма, яка проходить через центр вписаного кола трикутника ABC і середину M сторони BC, перетинає висоту AD цього трикутника в точці P. Знайдіть довжину відрізка AP.



Розв'язання. Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, K — точка дотику вписаного кола до сторони BC. Легко встановити, що кут ABC тупий. За формулою Герона обчислюємо площу S трикутника ABC, потім за формулою $r = \dfrac{S}{p}$, де p — півпериметр трикутника ABC, знаходимо радіус вписаного кола: $S = 120$ см^2, $r = 3$ см. Звідси $AD = \dfrac{2S}{BC} = 9,6$ см.

За теоремою Піфагора, $BD = \sqrt{16^2 - 9,6^2} = 12,8$ см. Як відомо, відрізок дотичної $BK = p - AC = 40 - 39 = 1$ см. Отже, $KM = BM - BK = 11,5$ см. Трикутники MKI та MDP подібні, і тому $PD = \dfrac{IK \cdot KM}{DM}$, $PD = 6,6$ см. Відтак, $AP = 3$ см.

Зауваження. Можна довести загальний факт (у позначеннях розібраної задачі). Нехай ABC — довільний трикутник, у якому $AB \neq AC$. Тоді $AP = r$.

Через точку K проведемо діаметр KF вписаного кола ω трикутника ABC. Розглянемо таку гомотетію з центром A, для якої образом кола ω є *зовнівписане* коло ω_A трикутника ABC, яке дотикається до сторони BC. Пряма BC перейде в пряму n, паралельну BC. Нехай коло ω_A дотикається до прямих n, BC і AC в точках Q, T і N відповідно. Неважко помітити, що відрізки QT і KF будуть гомотетичними, і тому точка F лежить на прямій BT.

Далі, $AN = p$, $CT = CN$, $CN = p - AC$. Отже, $BK = CT$, точка M є серединою відрізка KT, і тому $MI \parallel AF$. Оскільки $AP \parallel FI$, то чотирикутник $APIF$ — паралелограм, і $AP = FI = r$.

Відповідь: 3 см.

4. Див. задачу 4 рівня «А», 11 клас.

5. Нехай x_1 — довільне дійсне число, і для всіх натуральних n виконується рівність

$$x_{n+1} = \sqrt{7}\,x_n + 2\sqrt{x_n^2 + 4}\,.$$

Доведіть, що серед чисел x_1, x_2, … , x_{2013} принаймні 1005 чисел є ірраціональними.

Розв'язання. Якщо серед елементів послідовності $\{x_n\}_{n\ge1}$ є рівний нулю, то легко бачити, що всі наступні (тобто з більшими індексами) елементи є додатними, а тому серед чисел x_1, x_2, … , x_{2013} є не більше одного, рівного нулю (якщо $i < j$, $x_i = x_j = 0$, то x_j мусить бути додатним, і маємо суперечність). З даного рекурентного співвідношення одержуємо: $2x_n x_{n+1}\sqrt{7} = 3x_n^2 + x_{n+1}^2 - 16$ для всіх n. А тому x_n та x_{n+1} можуть бути одночасно раціональними числами тоді й тільки тоді, коли одне з них є нулем (якщо $x_n \ne 0$ і $x_{n+1} \ne 0$, то ми отримаємо, що $\sqrt{7}$ є раціональним числом, що неможливо).

Звернемо увагу на те, що коли для деякого n $x_n = 0$, то $x_{n+1} = 4$. Розглянемо 1006 пар чисел (x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_7), … , (x_{2009}, x_{2010}), (x_{2011}, x_{2012}). Якщо $x_k \ne 0$ для всіх k, $1 \le k \le 2012$, то серед чисел x_1, x_2, … , x_{2012} не менше за 1006 ірраціональних (хоча б одне в кожній парі). Якщо серед чисел x_1, x_3, x_5, … , x_{2009}, x_{2011} є нуль, то в парі з ним другим елементом буде число 4, і це означатиме, що серед цих пар є пара $(0,4)$ — єдина пара, обидва елементи якої — раціональні числа. Кожна з решти розглядуваних пар повинна містити ірраціональне число, і тому серед чисел x_1, x_2, … , x_{2012} щонайменше 1005 ірраціональних. Якщо нуль міститься серед чисел x_2, x_4, x_6, … , x_{2010}, x_{2012}, то в парі з ним другим елементом буде від'ємне ірраціональне число $-\frac{4}{\sqrt{3}}$, і тому ірраціональних чисел серед x_1, x_2, … , x_{2012} буде не менше, ніж 1006.