МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»

І.В. ФЕДАК

XIII Івано-Франківський обласний турнір юних математиків

Івано-Франківськ
– 2017 –

23 вересня 2017 року на факультеті математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника відбувся XIII обласний турнір юних математиків.

В напруженій боротьбі перемогу святкувала команда «Альфа» Природничо-математичного ліцею Івано-Франківської міської ради.

Разом з ними у фіналі змагалися дві команди Надвірнянського ліцею «Факторіал» та «Радикал», які фінішували другими та третіми відповідно.

Ще одне третє місце було присуджене команді «АЛІ 10-11» Івано-Франківського академічного ліцею-інтернату.

Крім того, за якісну підготовку до турніру журі рекомендувало відзначити грамотами команди «СІЧ» Долинського району, «АЛІ 9-10» Івано-Франківського академічного ліцею-інтернату та «ФТЛ 11», «ФТЛ 9-10» Івано-Франківського фізико-технічного ліцею-інтернату.

В індивідуальній першості кращими виявилися:

I місце

Мушак Юлія Ігорівна, Надвірнянський ліцей, 10 клас, 79 балів

Підгірняк Роман Андрійович, Івано-Франківський ПМЛ, 10 клас, 75 балів

II місце

Віфлінзідер Ольга Володимирівна, Надвірнянський ліцей, 11 клас, 44 бали

Тринога Мирослав Тарасович, Івано-Франківський ПМЛ, 10 клас, 28 балів

Кухтар Іван Петрович, Івано-Франківський академічний ліцей-інтернат, 11 клас, 28 балів

Кириченко Наталія Миколаївна, Івано-Франківський ФТЛ, 11 клас, 27 балів

III місце

Тороус Юлія Сергіївна, Надвірнянський ліцей, 9 клас, 20 балів

Петруняк Дмитро Васильович, Надвірнянський ліцей, 11 клас, 19 балів

Сисак Андрій Володимирович, Івано-Франківський академічний ліцей-інтернат, 11 клас, 18 балів

Куцах Андрій Ігорович, Надвірнянський ліцей, 11 клас, 16 балів

Кіцун Вероніка Петрівна, Івано-Франківський академічний ліцей-інтернат, 9 клас, 15 балів

Солодуха Ярослав Ярославович, Долинська гімназія №1, 10 клас, 15 балів

Дві команди області представляли Прикарпаття на XX Всеукраїнському турнірі юних математиків імені професора М.Й. Ядренка, який проходив з 29 жовтня до 2 листопада 2017 року у Вінниці.

Абсолютним переможцем цього турніру стала команда «Харків-27». Серед призерів і обидві команди з Івано-Франківської області, які відзначені дипломами третього ступеня. Це:

Команда* «Альфа» *природничо-математичного ліцею Івано-Франківської міської ради у складі:

Тринога Мирослав, учень 10 класу,

Тихомиров Валентин, учень 10 класу,

Підгірняк Роман, учень 10 класу,

Гащук Ростислав, учень 10 класу,

Фоменко Надія, учениця 10 класу.

Керівник команди: Красновська Людмила Павлівна, вчитель Івано-Франківського природничо-математичного ліцею.

Науковий керівник: Казмерчук Анатолій Іванович, доцент кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника».

Команда* «Радикал» *Надвірнянського ліцею Надвірнянської районної ради у складі:

Петруняк Дмитро, учень 11 класу,

Віфлінзідер Ольга, учениця 11 класу,

Грицюк Володимир, учень 10 класу,

Смеречук Адам, учень 10 класу,

Мушак Юлія, учениця 10 класу.

Керівник команди: Івановський Іван Борисович, вчитель Надвірнянського ліцею.

Науковий керівник: Федак Іван Васильович, доцент кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника».

Учні Надвірнянського ліцею Петруняк Дмитро та Смеречук Адам успішно виступили й на олімпіаді з математики, яка проводилася в рамках цього турніру, і відзначені дипломами третього ступеня.

Пропонуємо вашій увазі розв’язання задач XIII обласного турніру юних математиків з узагальненнями до деяких із них.

Умови задач

1. На XIII обласному ТЮМ-2017 відзначили 13 переможців особистої першості. Всі вони виявилися різного зросту, але отримали однакові призи з 17 цукерок. Кожен хлопець-переможець подарував по одній цукерці кожному вищому за себе переможцеві, а кожна дівчина-переможець – кожному нижчому за себе переможцеві. В результаті в переможців Саші, Жені та Роми кількість подарованих їм цукерок виявилася однаковою. Чи обов’язково серед названих трьох учнів є: а) хоч одна дівчинка; б) хоч один хлопчик?

2. Таблицю розмірами 5×5 Миколка заповнив різними натуральними числами від 1 до 25 включно і стверджує, що всі 12 сум чисел по рядках, стовпцях та діагоналях таблиці є простими числами. Чи не помиляється він?

3. Числа Фібоначчі визначаються рівностями:

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_{k+2} = F_k + F_{k+1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть усі можливі значення виразу

$$\frac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}} + \frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}} + \frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}},\ n \in \mathbb{N}.$$

4. Дослідіть, яких значень можуть набувати площі трикутників $A_1A_2A_3$ з вершинами $A_1\left(F_{m+1};F_{m+2}\right)$, $A_2\left(F_{m+3};F_{m+4}\right)$, $A_3\left(F_{m+5};F_{m+6}\right)$, $m \ge 0$, координатами яких є числа Фібоначчі.

5. Розв’яжіть наступні системи рівнянь:

$$\text{а)}\begin{cases} x^3 + x + y = x^2 + 2, \\ y^3 + y + z = y^2 + 2, \\ z^3 + z + x = z^2 + 2; \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} x^3 + x + y = x^2 + 3, \\ y^5 + y + z = 2y^4 + 5, \\ z^7 + 2z + x = 3z^6 + 7; \end{cases}$$

$$\text{в)}\begin{cases} x^7 + x + y = 4x^6 + 7, \\ y^7 + 2y + z = 3y^6 + 7, \\ z^7 + 3z + x = z^6 + 7. \end{cases}$$

6. Для додатних чисел a, b, c, x доведіть нерівність

$$\frac{a^3}{ax^2 + 2bx + c} + \frac{b^3}{bx^2 + 2cx + a} + \frac{c^3}{cx^2 + 2ax + b} \ge \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\left(x+1\right)^2}.$$

7. Для $a > b > c > 0$ обґрунтуйте нерівності:

а) $(a-c)(a^2+c^2) > (a-b)(a^2+b^2)+(b-c)(b^2+c^2)$;

б) $(a+c)(a^2-c^2) < (a+b)(a^2-b^2)+(b+c)(b^2-c^2)$.

8. У рівнобічній трапеції $ABCD$ з основами AD та BC діагоналі перетинаються в точці P, а прямі AB та CD – в точці Q. O_1 та O_2 – центри кіл, описаних навколо трикутників ABP та CDP, r – радіус цих кіл. Побудуйте трапецію $ABCD$ за даними відрізками O_1O_2, PQ та радіусом r.

9. У нерівнобедреному трикутнику ABC проведено висоти AH, BT, CR. На стороні BC відмітили точку P; точки X та Y – проекції P на AB та CA відповідно. Дві спільні зовнішні дотичні до описаних кіл трикутників XBH та HCY перетинаються в точці Q. Доведіть, що точка Q лежить на фіксованій прямій, не залежно від вибору P.

10. Вкажіть хоч один прямокутний трикутник ABC із цілочисловими сторонами, всередині якого можна вказати таку точку M, що довжини відрізків MA, MB та MC є цілими. Чи існують принаймні два таких трикутники, які не є подібними?

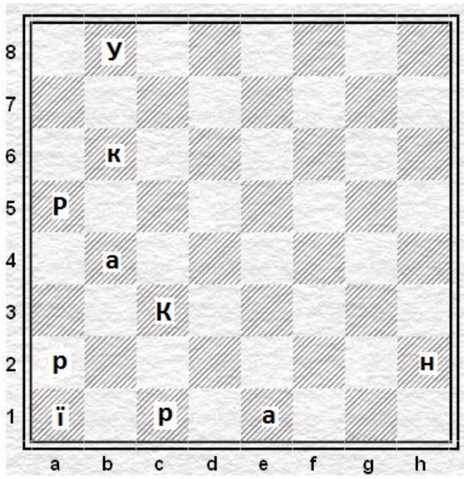
11. Знайдіть хоч одну четвірку натуральних чисел a, b, c, d таких, що $a^3+b^3+c^3=d^3$. Скінченною чи нескінченною є множина таких четвірок за умови, що жодна четвірка цієї множини не утворюється з іншої множенням усіх її чисел на одне і те ж число?

12. Знайдіть усі натуральні числа n, k такі, що $C_{n-1}^{k+1}=C_{n+1}^{k-1}$.

13. Клітинки дошки 8×8 розфарбовані в шаховому порядку. За один хід можна вибрати клітинку дошки та одночасно перефарбувати в протилежний колір усі клітинки, що мають із нею спільну сторону, при цьому сама клітинка не перефарбовується. Чи можна за декілька ходів перефарбувати в протилежний колір усі клітинки дошки?

14. Паркан складається з 20 непофарбованих дощок. Марічка і Петрик по черзі фарбують дошки в блакитний або жовтий колір (кожен з гравців може пофарбувати будь-яку не пофарбовану дошку в будь-який із двох кольорів). Починає Марічка. Вона хоче, щоб у пофарбованому паркані було якомога більше кольорових переходів, Петрик – щоб їх було якомога менше. Таким чином, ідеал Марічки – це паркан, пофарбований у шаховому порядку (19 переходів), а ідеал Петрика – однокольоровий паркан (0 переходів). Як слід грати Марічці та Петрику, щоб кожен з них досягнув своєї мети, та яку кількість кольорових переходів матиме паркан?

15. На діаграмі зображено позицію, яка могла би виникнути в шаховій партії. Різні літери позначають різні шахові фігури. Великі літери відповідають певному кольору фігури, маленькі – іншому кольору. Треба визначити цю позицію.



16. Для множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ позначимо через U_k кількість її перестановок, в яких рівно k елементів залишаються на своїх місцях. Доведіть, що $\sum_{k=1}^{n} kU_k = n!$

17. Доведіть, що існує таке число n, що кожне натуральне число, яке перевищує n, можна розбити на п'ять взаємно простих доданків, які більші за 1.

18. Яку найбільшу кількість дільників може мати число m, якщо відомо, що воно менше за 1 000 000 ? (Одиниця та m також вважаються дільниками).

19. Про збіжну послідовність $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ відомо, що її члени з непарними номерами спадають, а з парними номерами – зростають і, крім того, для всіх $n \geq 1$ справджується нерівність

$$2 \leq \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n - a_{n+1}} \leq 3.$$

Знайдіть межі, в яких може знаходитись границя цієї послідовності.

20. На деяких клітинках дошки $n \times n$ стоять фішки (не більше однієї фішки на клітинці) так, що жодні чотири фішки не знаходяться у вершинах прямокутника. Доведіть, що кількість фішок не перевищує $n\left(\sqrt{n}+1\right)$.

Розв'язання задач

1. а). Не обов'язково. Наприклад, якщо у порядку спадання зросту імена перших п'яти переможців будуть Саша, Оксана, Женя, Світлана та Рома, то у трьох хлопчиків – Саші, Жені та Роми – кількість подарованих їм цукерок виявиться однаковою.

б). Не обов'язково. Відповідний приклад пропонуємо читачам підібрати самостійно.

2. Не обов'язково. Наводимо один з варіантів такого заповнення:

11	2	14	19	21
8	13	3	22	1
20	17	15	6	9
7	24	18	10	12
25	5	23	16	4

Цікаво, що в цій таблиці всі 12 сум квадратів чисел по рядках, стовпцях та діагоналях також є простими числами.

3. Використовуючи формули Кассіні

$$F_{2n}^2+1=F_{2n-1}F_{2n+1}\ ,\ \ L_{2n}^2-5=L_{2n-1}L_{2n+1}\,,$$

отримаємо

$$F_{2n-1}^2+F_{2n+1}^2+1=\left(F_{2n+1}-F_{2n-1}\right)^2+1+2F_{2n-1}F_{2n+1}=$$
$$=\left(F_{2n}^2+1\right)+2F_{2n-1}F_{2n+1}=3F_{2n-1}F_{2n+1}$$

та

$$L_{2n-1}^2+L_{2n+1}^2-5=\left(L_{2n+1}-L_{2n-1}\right)^2-5+2L_{2n-1}L_{2n+1}=$$
$$=\left(L_{2n}^2-5\right)+2L_{2n-1}L_{2n+1}=3L_{2n-1}L_{2n+1}.$$

Тому для всіх натуральних n обидві частини заданої рівності дорівнюють 3.

Подібна рівність для чисел Фібоначчі та Люка з парними індексами має вигляд

$$\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}}+\frac{F_{2n+2}}{F_{2n}}-\frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}}=\frac{L_{2n}}{L_{2n+2}}+\frac{L_{2n+2}}{L_{2n}}+\frac{5}{L_{2n}L_{2n+2}}.$$

Для всіх натуральних n обидві її частини також дорівнюють 3. Для доведення використовуємо аналогічні перетворення та формули Кассіні у вигляді $F_{2n+1}^2-1=F_{2n}F_{2n+2}$ та $L_{2n+1}^2+5=L_{2n}L_{2n+2}$.

4. Спочатку доведемо, що $A_1A_4 \parallel A_2A_3$, тобто доводимо рівність

$$\frac{F_{m+7}-F_{m+1}}{F_{m+8}-F_{m+2}}=\frac{F_{m+5}-F_{m+3}}{F_{m+6}-F_{m+4}}.$$

Для її правої частини безпосередньо за означенням чисел Фібоначчі отримуємо

$$\frac{F_{m+5}-F_{m+3}}{F_{m+6}-F_{m+4}}=\frac{F_{m+4}}{F_{m+5}}.$$

Крім того, маємо

$$F_{m+7}-F_{m+1}=\left(F_{m+6}+F_{m+5}\right)-\left(F_{m+3}-F_{m+2}\right)=$$
$$=\left(\left(F_{m+4}+F_{m+5}\right)+F_{m+5}\right)-\left(F_{m+3}-\left(F_{m+4}-F_{m+3}\right)\right)=$$
$$=2F_{m+5}+2F_{m+4}-2F_{m+3}=4F_{m+4}.$$

Аналогічно доводимо, що $F_{m+8}-F_{m+2}=4F_{m+5}$. Тому також

$$\frac{F_{m+7}-F_{m+1}}{F_{m+8}-F_{m+2}}=\frac{F_{m+4}}{F_{m+5}}.$$

З доведеного випливає, що для всіх чотирикутників $A_1A_2A_3A_4$ з вказаними в умові задачі вершинами $A_1\left(F_{m+1};F_{m+2}\right)$, $A_2\left(F_{m+3};F_{m+4}\right)$, $A_3\left(F_{m+5};F_{m+6}\right)$ та $A_4\left(F_{m+7};F_{m+8}\right)$ рівними є площі трикутників $A_1A_2A_3$ та $A_2A_3A_4$ як таких, що мають спільну основу A_2A_3 та рівні висоти, проведені до неї. Тому площі всіх трикутників $A_1A_2A_3$ дорівнюють площі трикутника з вершинами $A_1\left(F_1;F_2\right)$, $A_2\left(F_3;F_4\right)$, $A_3\left(F_5;F_6\right)$, тобто з вершинами $A_1(1;1)$, $A_2(2;3)$, $A_3(5;8)$.

Якщо точки F_1, F_3, F_5 є проекціями точок A_1, A_2, A_3 відповідно на вісь абсцис, то площу цього трикутника виразимо через площі відповідних прямокутних трапецій:

$$S_{A_1A_2A_3} = S_{F_1A_1A_2F_3} + S_{F_3A_2A_3F_5} - S_{F_1A_1A_3F_5} =$$
$$= \frac{1}{2}(1+3)\cdot 1 + \frac{1}{2}(3+8)\cdot 3 - \frac{1}{2}(1+8)\cdot 4 = \frac{1}{2},$$

що й треба було довести.

Зауважимо також, що площа многокутника $A_1A_2...A_n$, $n \geq 3$, з вершинами $A_1(F_{m+1};F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3};F_{m+4})$, …, $A_n(F_{m+2n-1};F_{m+2n})$ не залежить від вибору числа $m \geq 0$ і дорівнює $\frac{F_{2n-2} - n + 1}{2}$.

Справедливе й загальніше твердження: площа многокутника $A_1A_2...A_n$, $n \geq 3$, з вершинами $A_1(F_{m+k};F_{m+2k})$, $A_2(F_{m+3k};F_{m+4k})$, …, $A_n\left(F_{m+(2n-1)k};F_{m+2nk}\right)$ не залежить від вибору чисел $m \geq 0$ та $k \geq 1$ і дорівнює $\frac{F_k\left(F_{2k(n-1)} - (n-1)F_{2k}\right)}{2}$.

Ще загальніший результат доведений автором цієї статті при розв'язуванні задачі B-1195 з журналу The Fibonacci Quarterly (Vol. 55.3, August 2017. Elementary problems and solutions).

5. а) $(1,1,1)$; **б)** $(1,2,3)$; **в)** $(4,3,1)$. Для доведення єдиності запишіть задані системи рівнянь у вигляді:

а) $$\begin{cases}(x-1)(x^2+1)=1-y,\\(y-1)(y^2+1)=1-z,\\(z-1)(z^2+1)=1-x;\end{cases}$$ б) $$\begin{cases}(x-1)(x^2+1)=2-y,\\(y-2)(y^4+1)=3-z,\\(z-3)(z^6+2)=1-x;\end{cases}$$

в) $$\begin{cases}(x-4)(x^6+1)=3-y,\\(y-3)(y^6+2)=1-z,\\(z-1)(z^6+3)=4-x.\end{cases}$$

Припускаючи, наприклад, для системи а), що $x > 1$, з рівнянь цієї системи послідовно отримаємо $y < 1$, $z > 1$, $x < 1$, що суперечить припущенню. Аналогічно аналізуємо випадок з $x<1$, що також приводить до суперечності.

Таку ж ідею можна застосувати для розв'язування системи рівнянь з XX Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка:

$$x_1^3+x_1+x_2=F_1x_1^2+F_3,$$
$$x_2^5+x_2+x_3=F_2x_2^4+F_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{2016}^{4033}+x_{2016}+x_{2017}=F_{2016}x_{2016}^{4032}+F_{2018},$$
$$x_{2017}^{4035}+\frac{F_{2019}-1}{F_{2017}}x_{2017}+x_1=F_{2017}x_{2017}^{4034}+F_{2019}.$$

Скориставшись рівностями

$$F_1=F_2=1,\ F_{k+2}=F_k+F_{k+1},\ k\in\mathbb{N},$$

запишемо систему рівнянь у вигляді:

$$(x_1-F_1)\left(x_1^2+1\right)=F_2-x_2,$$
$$(x_2-F_2)\left(x_2^4+1\right)=F_3-x_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x_{2016}-F_{2016})\left(x_{2016}^{4032}+1\right)=F_{2017}-x_{2017},$$
$$(x_{2017}-F_{2017})\left(x_{2017}^{4034}+\frac{F_{2019}-1}{F_{2017}}\right)=F_1-x_1.$$

Звідси отримуємо єдиний розв'язок: $x_k=F_k,\ k=1,2,\ldots,2017.$

6. Розв'яжемо загальнішу задачу, а саме для додатних чисел a, b, c, u, v, w доведемо нерівність

$$\frac{a^3}{au+bv+cw}+\frac{b^3}{bu+cv+aw}+\frac{c^3}{cu+av+bw}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{u+v+w}.$$

Скориставшись нерівностями

$$\frac{y^2}{z}\ge 2y-z,\ z>0,\qquad a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca,$$

отримаємо

$$\frac{a^3}{au+bv+cw}+\frac{b^3}{bu+cv+aw}+\frac{c^3}{cu+av+bw}=$$

$$=\frac{1}{(u+v+w)^2}\left[a\cdot\frac{a^2(u+v+w)^2}{au+bv+cw}+b\cdot\frac{b^2(u+v+w)^2}{bu+cv+aw}+c\cdot\frac{c^2(u+v+w)^2}{cu+av+bw}\right]\geq$$

$$\geq\frac{1}{(u+v+w)^2}\Big[a\cdot\big(2a(u+v+w)-(au+bv+cw)\big)+$$

$$+b\cdot\big(2b(u+v+w)-(bu+cv+aw)\big)+c\cdot\big(2c(u+v+w)-(cu+av+bw)\big)\Big]=$$

$$=\frac{1}{(u+v+w)^2}\Big[\left(a^2+b^2+c^2\right)(u+v+w)+$$

$$+\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)(v+w)\Big]\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{u+v+w}.$$

Для $u=x^2,\ v=2x,\ w=1$ як окремий випадок отримуємо нерівність з умови. Рівність досягається для $a=b=c$.

7. а). Запишіть доданки нерівності як подвоєні площі прямокутних трапецій з двома вершинами на осі абсцис та двома на параболі $y=x^2$ і скористайтеся вгнутістю графіка цієї параболи;

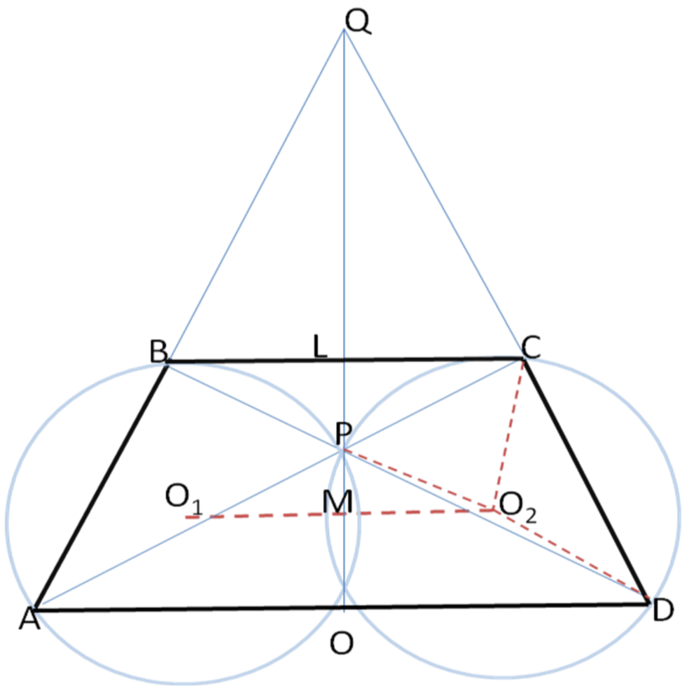
б). Замініть задані числа a, b, c їх квадратними коренями й запишіть доданки отриманої при цьому нерівності як подвоєні площі прямокутних трапецій з двома вершинами на осі абсцис та двома на параболі $y=\sqrt{x}$. Скористайтеся опуклістю графіка цієї параболи.

8. Спочатку доведемо (див. рисунок), що $\angle O_2PO=\angle ODC$. Справді,

$$\angle O_2PO=180^0-\angle O_2PC-\angle OPA=$$

$$=180^0-\left(90^0-\angle PAO\right)-\frac{180^0-\angle PO_2C}{2}=$$

$$=\angle PAO+\frac{\angle PO_2C}{2}=\angle PDO+\angle PDC=\angle ODC.$$



Тепер опишемо покрокову побудову трапеції:

а). Будуємо заданий відрізок O_1O_2.

б). Будуємо кола з центрами в точках O_1 та O_2 з заданими радіусами r, одну з точок перетину яких позначаємо через P.

в). Через точку P проводимо серединний перпендикуляр до відрізка O_1O_2, на якому за відомою відстанню PQ відкладаємо точку Q у напрямі, протилежному до O_1O_2.

г). Проводимо відрізок PO_2.

д). З точки Q проводимо промені під кутами до променя QP, які дорівнюють куту O_1O_2P.

е). На перетині цих променів з побудованими вище колами отримуємо вершини шуканої трапеції.

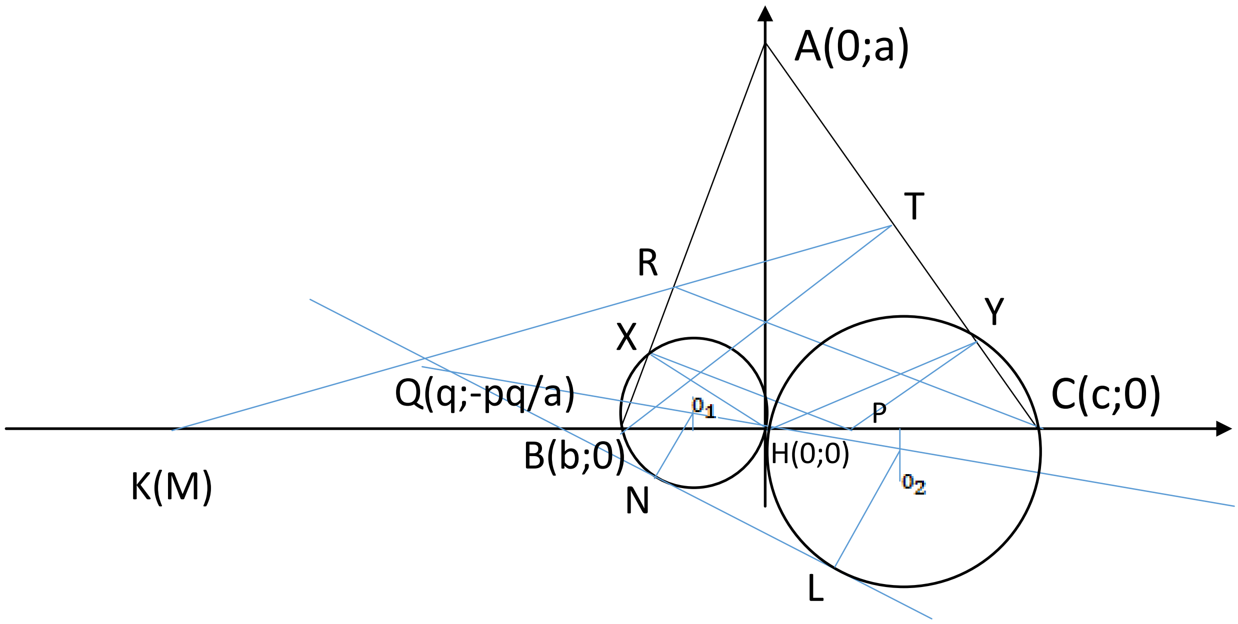
Пропонуємо читачам самостійно дослідити, за яких умов усі описані в пп. а) – е) побудови можуть бути виконані, і переконатися, що отриманий при цьому чотирикутник буде шуканою трапецією.

9. Розглянемо систему координат (дивись рисунок), в якій вершини трикутника ABC мають координати $A(0;a)$, $B(b;0)$, $C(c;0)$.

При цьому для конкретності вважаємо, що $c > -b > 0$.

(Якщо $b=0$, то коло, описане навколо трикутника XBH, вироджується в точку H; а для $b>0$ коло, описане навколо трикутника міститься всередині кола, описаного навколо трикутника HCY, і дотикається до останнього в точці H).

Випадок $0<c<-b$ розглядається аналогічно.



Тоді $H(0;0)$. Виберемо також $P(p;0)$, де $-b<p<c$. Далі послідовно отримуємо:

$$AB: \quad y=-\frac{a}{b}x+a, \qquad AC: \quad y=-\frac{a}{c}x+a,$$

$$PX: \quad y=\frac{b}{a}(x-p), \qquad PY: \quad y=\frac{c}{a}(x-p).$$

Позначимо через O_1 та O_2 центри кіл, описаних навколо трикутників XBH та HCY відповідно. Їх координати знайдемо як координати перетину серединних перпендикулярів відповідних сторін цих трикутників:

$$O_1: \quad \begin{cases} y=\dfrac{b}{a}\left(x-\dfrac{p+b}{2}\right) \\ x=\dfrac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow O_1\left(\frac{b}{2};-\frac{bp}{2a}\right).$$

Аналогічно знаходимо $O_2\left(\dfrac{c}{2};-\dfrac{cp}{2a}\right)$. Тому $O_1O_2: \quad y=-\dfrac{p}{a}x.$

Отже, маємо $Q\left(q;-\frac{pq}{a}\right)$, де q визначимо з умови, що через Q проходять спільні зовнішні дотичні вказаних вище двох кіл з радіусами R_1 та R_2 відповідно. З подібності відповідних трикутників отримуємо співвідношення $\frac{R_1}{R_2}=\frac{QO_1}{QO_2}=\frac{\frac{b}{2}-q}{\frac{c}{2}-q}=\frac{b-2q}{c-2q}$.

Оскільки також $\frac{R_1}{R_2}=-\frac{b}{c}$, то з рівняння $\frac{b-2q}{c-2q}=-\frac{b}{c}$ знаходимо $q=\frac{bc}{b+c}$, звідки випливає, що точка Q лежить на прямій $x=\frac{bc}{b+c}$, не залежно від вибору точки P.

Як узагальнення, доведемо, що вона рівновіддалена від точок K та H, де K – точка перетину прямих TR та BC (див. рисунок).

Розглянемо точку $M\left(\frac{2bc}{b+c};0\right)$. Зрозуміло, що $MQ=QH$. Враховуючи, що також

$$BT:\quad y=\frac{c}{a}(x-b),\qquad CR:\quad y=\frac{b}{a}(x-c),$$

знайдемо

$$T\left(\frac{c\left(a^2+bc\right)}{a^2+c^2};\frac{ac(c-b)}{a^2+c^2}\right)\quad \text{та}\quad R\left(\frac{b\left(a^2+bc\right)}{a^2+b^2};\frac{ab(b-c)}{a^2+b^2}\right).$$

Оскільки $\frac{x_R-x_M}{y_R}=\frac{x_T-x_M}{y_T}$, то точки M, R, T лежать на одній прямій. Отже, точка K співпадає з точкою M. Тому також $KQ=QH$.

Наведемо також геометричне розв’язання цієї задачі.

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $AB<AC$. Побудуємо коло на відрізку AP, як на діаметрі. На цьому ж колі знаходяться й точки X, Y та H, тому $\angle HXP=\angle HYP$. Нехай O_1 та O_2 центри кіл, описаних навколо трикутників XBH та HCY відповідно.

$\angle BHO_1 = \angle HXP = \angle HYP = \angle CHO_2$, тому описані кола трикутників XBH та HCY дотикаються одне одного.

З подібності трикутників маємо

$$\frac{O_2H}{O_1H} = \frac{QH + O_2H}{QH - O_1H},\ QH = \frac{2 \cdot O_1H \cdot O_2H}{O_1H - O_2H}.$$

Нехай $D-$ проекція точки Q на пряму BC. Тоді

$$DH = QH \cos \angle BHO_1 = \frac{2 \cdot O_2H \cos \angle BHO_1 \cdot O_1H \cos \angle BHO_1}{O_2H \cos \angle BHO_1 - O_1H \cos \angle BHO_1} = \frac{HB \cdot HC}{HC - HB}.$$

Таким чином, точка Q лежить на фіксованій прямій, не залежно від вибору P.

10. Нескладно переконатися, що таким є, наприклад, трикутник, вершини якого мають координати: $A(80;0)$, $B(0;84)$, $C(0;0)$. Тоді $AC = 80$, $BC = 84$ і за теоремою Піфагора $AB = 116$. Якщо тепер $M(40;9)$, то за тією ж теоремою Піфагора знаходимо $MA = MC = 41$, $MB = 85$.

Доведемо, що неподібних між собою прямокутних трикутників з такою властивістю існує безліч.

Нехай $A(4mn;0)$, $B\left(0;4m^2 - n^2\right)$, $C(0;0)$, де $m, n-$ натуральні числа, $m > n > 1$. Тоді $AC = 4mn$, $BC = 4m^2 - n^2$ і за теоремою Піфагора $AB = 4m^2 + n^2$.

Вибравши тепер всередині точку $M\left(2mn; m^2 - n^2\right)$, отримаємо $MA = MC = m^2 + n^2$ та

$$MB^2 = \left(3m^2\right)^2 + (2mn)^2 = m^2\left((3m)^2 + (2n)^2\right) = m^2\left(n^2 + 1\right)^2,$$

якщо $3m = n^2 - 1$.

Покладаючи, наприклад, $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, звідси знаходимо $m = k(3k + 2)$, $k \in \mathbb{N}$.

Серед отриманих при цьому для різних $k \in \mathbb{N}$ прямокутних трикутників є нескінченна кількість таких, жодні два з яких не є подібними, бо відношення катетів

$$\frac{AC}{BC}=\frac{2mm}{4m^2-n^2}=\frac{4k(3k+2)(3k+1)}{4k^2(3k+2)^2-(3k+1)^2}=$$

$$=\frac{4k(3k+1)(3k+2)}{(k+1)(2k+1)(3k-1)(6k+1)}$$

прямує до нуля при $k\to\infty$, отже, або саме утворює спадну послідовність, або містить спадну підпослідовність.

Зокрема, при $k=1, m=5, n=4$ отримуємо наведений першим приклад потрібного прямокутного трикутника.

Відзначимо, що можна було б також вибирати $n=3k+2,\ k\in\mathbb{N}$. При цьому отримали би $m=(k+1)(3k+1),\ k\in\mathbb{N}$.

Зауважимо, що точка M не обов'язково повинна знаходитися на середній лінії трикутника. Наприклад, для трикутника з вершинами $A(69;0)$, $B(0;92)$, $C(0;0)$ і точки $M(21;20)$ отримуємо $AC=69$, $BC=92$, $AB=115$, $MA=52$, $MB=75$, $MC=29$.

11. Такою є, наприклад, четвірка чисел $a=3, b=4, c=5, d=6$. Справді, $3^3+4^3+5^3=27+64+125=216=6^3$.

Доведемо, що множина таких четвірок натуральних чисел, що жодна четвірка цієї множини не утворюється з іншої множенням усіх її чисел на одне і те ж число, є нескінченною. Представляючи ці числа у вигляді квадратичних функцій від n, доведемо, що записану рівність при кожному натуральному n задовольняють натуральні числа:

$$a=3n^2+11n+3,\ b=4n^2+4n+6,\ c=5n^2+5n-3,\ d=6n^2+8n+6.$$

Справді, якщо

$$f(x)=(3x^2+11x+3)^3+(4x^2+4x+6)^3+(5x^2+5x-3)^3-(6x^2+8x+6)^3,$$

то, як нескладно переконатися,

$$f'(x)=3(6x+11)(3x^2+11x+3)^2+3(8x+4)(4x^2+4x+6)^2+$$

$$+3(10x+5)(5x^2+5x-3)^2-3(12x+8)(6x^2+8x+6)^2=$$

$$=3(6x+11)(9x^4+66x^3+139x^2+66x+9)+$$

$$+3(8x+4)(16x^4+32x^3+64x^2+48x+36)+$$

$$+3(10x+5)\left(25x^4+50x^3-5x^2-30x+9\right)-$$
$$-3(12x+8)\left(36x^4+96x^3+136x^2+96x+36\right)\equiv 0.$$

Тому $f(x)=const$. А оскільки $f(0)=0$, то $f(x)\equiv 0$.

Наведемо також інші представлення з використанням многочленів вищих степенів:

$$a=1,\ \ b=-1+72n^3,\ c=144n^4-6n,\ d=144n^4;$$
$$a=9n^3-1,\ b=9n^4-3n,\ c=1,\ d=9n^4;$$
$$a=3n^3-9,\ b=n^4-9n,\ c=9,\ d=n^4,\ n\geq 3.$$

Перше з них отримуємо із знайденого у 1740 році розв'язку Ейлера задачі про чотири куби:

$$a=1+(m-3n)(m^2+3n^2),$$
$$b=-1+(m+3n)(m^2+3n^2),$$
$$c=-m-3n+(m^2+3n^2)^2,$$
$$d=-m+3n+(m^2+3n^2)^2,$$

в якому достатньо покласти $m=3n$:

Друге маємо із розв'язку Морделла, отриманого ним 1956 року:

$$a=9n^3m-m^4,$$
$$b=9n^4-3nm^3,$$
$$c=m^4,$$
$$d=9n^4;$$

покладаючи в ньому $m=1$.

12. Розглянемо спочатку випадок, коли $n-1\geq k+1$, тобто різниця $p=n-k\geq 2$.

Якщо $p=2$, то $n-1=k+1$ і $C_{n-1}^{k+1}=1$. Тому також $C_{n+1}^{k-1}=1$ і, оскільки $n+1>k-1$, це можливо лише за умови, що $k=1$. При цьому $n=3$.

Нехай тепер $p\geq 3$. Скориставшись формулами для біноміальних коефіцієнтів, запишемо задане рівняння у вигляді

$$\frac{(n-1)!}{(k+1)!(n-k-2)!}=\frac{(n+1)!}{(k-1)!(n-k+2)!}.$$

Скоротивши обидві частини останньої рівності на спільні дільники і використовуючи позначення $p = n - k$, отримаємо рівняння

$$(p+2)(p+1)p(p-1) = (n+1)n(k+1)k.$$

Згрупувавши в обох його частинах перший множник з четвертим, а другий з третім, і використовуючи рівність $n = k + p$, будемо мати

$$\left(p^2 + p - 2\right)\left(p^2 + p\right) = \left(k^2 + kp + k\right)\left(k^2 + kp + k + p\right).$$

Позначивши $p^2 + p - 2 = s$ та $k^2 + kp + k = q$, запишемо останню рівність у вигляді $s(s+2) = q(q+p)$.

Для $p \geq 3$ вона можлива лише за умови $q < s$. Тому покладемо $q = \frac{a}{b}s = \frac{a}{b}\left(p^2 + p - 2\right)$, де $\frac{a}{b}$ – нескоротний дріб, причому $a < b$. Тоді

$$q + p = \frac{b}{a}(s+2) \Leftrightarrow \frac{a}{b}\left(p^2 + p - 2\right) + p = \frac{b}{a}\left(p^2 + p\right).$$

Внаслідок нескоротності дробу $\frac{a}{b}$ звідси випливає, що $p^2 + p - 2 \vdots b$, тому також $p^2 + p \vdots a$.

Запишемо останню рівність у вигляді

$$a^2\left(p^2 + p - 2\right) + abp = b^2\left(p^2 + p\right). \qquad (*)$$

З рівності (*) випливає, що $2a^2 \vdots p$. Оскільки $p \geq 3$, то $a \neq 1$. Також із взаємної простоти чисел p та $p+1$ і подільності $p^2 + p \vdots a$ випливає, що $p \vdots a$. Якщо при цьому p не ділиться на a^2, то з рівності (*) отримуємо суперечність: її ліва частина ділиться на a^2, а права – ні. Тому $p \vdots a^2$, що разом із подільністю $2a^2 \vdots p$ при $p \geq 3$ та $a \geq 2$ можливо лише у двох випадках: $p = a^2$ та $p = 2a^2$.

Нехай $p = a^2$. Тоді після скорочення на a^2 рівність (*) можна записати у вигляді $a^4 + a^2 - 2 + ab = b^2\left(a^2 + 1\right)$.

Оскільки $b \geq a + 1$, то з очевидних нерівностей $b^2 > ab$ та $b^2a^2 \geq (a+1)^2 a^2 = a^4 + 2a^3 + a^2 > a^4 + a^2 - 2$ отримуємо, що попередня рівність не справджується.

Аналогічно для $p=2a^2$ рівність (*) після скорочення на a^2 набуде вигляду $4a^4+2a^2-2+2ab=b^2\left(4a^2+2\right)$.

Враховуючи тепер очевидні нерівності $2b^2>2ab$ та $4b^2a^2\geq 4\left(a+1\right)^2a^2=4a^4+8a^3+4a^2>4a^4+2a^2-2$, отримаємо, що й в цьому випадку рівність (*) не справджується.

Таким чином, при $p\geq 3$ задане в умові рівняння з біноміальними коефіцієнтами розв’язків не має.

Можна було міркувати ще й так.

З умови задачі отримуємо рівність

$$n(n+1)k(k+1)=(n-k-1)(n-k)(n-k+1)(n-k+2). \qquad (**)$$

Введемо позначення: $p=n-k$.

Якщо $p=2$, то (**) зведеться до рівняння

$$k(k+1)(k+2)(k+3)=4!,$$

яке має один корінь $k=1$ (тоді $n=3$).

Якщо $p>2$, то виконаємо такі перетворення рівності (**):

$$4n^2k^2+4nk(n+k)+4nk=4(p-1)p(p+1)(p+2),$$

$$(2nk+n+k)^2-(n+k)^2+4nk=4(p^2+p-2)(p^2+p),$$

$$(2nk+n+k)^2-(n-k)^2=(2p^2+2p-2)^2-4,$$

$$(2nk+n+k)^2=(2p^2+2p-2)^2+p^2-4.$$

А оскільки при $p>2$

$$(2p^2+2p-2)^2<(2p^2+2p-2)^2+p^2-4<(2p^2+2p-1)^2,$$

то число $(2p^2+2p-2)^2+p^2-4$ не може бути повним квадратом. Отже, в такому разі інших розв’язків початкового рівняння не отримаємо.

Для повноти розв’язання розглянемо також випадки, коли $p=n-k\leq 1$. При цьому врахуємо, що для $l>m$ прийнято вважати $C_m^l=0$. Це цілком логічно, бо вибрати із множини більше елементів, ніж вона містить не можна.

Відповідно, для $p=1$, $p=0$, $p=-1$, та $p=-2$ для всіх натуральних чисел n, k у лівій частині рівності $C_{n-1}^{k+1}=C_{n+1}^{k-1}$ отримаємо нуль, а її права частина буде додатною. Тому у цих випадках рівняння не матиме розв’язків.

Якщо ж $p = n - k \le -3$, то в обох частинах заданого рівняння отримаємо нулі. Звідси знаходимо нескінченну множину його розв’язків з довільними натуральними $n,\ k$, які задовольняють нерівність $k \ge n + 3$.

13. Умова задачі зводиться до виділення на дошці 8×8 деякої кількість клітинок так, щоб поруч з кожною клітинкою дошки знаходилася рівно одна виділена клітинка? Вибираючи в довільному порядку по одному разові виділені клітинки, ми зможемо перефарбувати всі клітинки шахової дошки у протилежний колір.

Розглянемо зразу загальнішу задачу про виділення таких клітинок на дошці розмірами $2n \times 2n$. Наступний ланцюжок табличок показує, як, рухаючись по спіралі, переходити від дошки $2n \times 2n$ до дошки $2(n+1) \times 2(n+1)$:

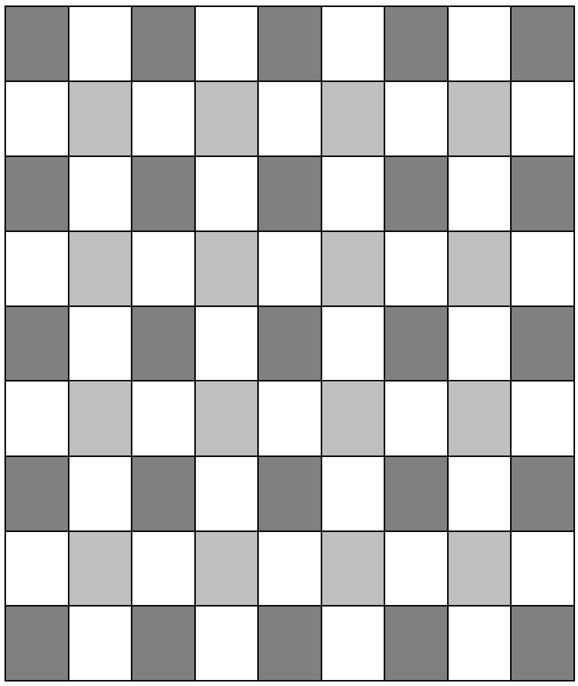
25	26			27	28			29	30		
											31
		9	10			11	12				32
24									13		
23				1	2				14		
		8					3				33
		7					4				34
22				6	5				15		
21									16		
		20	19			18	17				35
											36
42	41			40	39			38	37		

Тут клітинки 1, 2 виділені у зеленому квадраті 2×2. Далі, пропускаючи дві клітинки дошки і повертаючи під прямими кутами за стрілкою годинника перейдемо до квадрата 4×4 з використанням клітинок 1 – 6. Добавляючи за цим же принципом клітинки 7 – 12, отримаємо потрібний результат для квадрата 6×6. Ще одна пів-вітка спіралі з виділеними клітинками 13 – 20 приводить нас до квадрата 8×8, про який йшла мова в основній задачі. На рисунку зображене також продовження спіралі для перефарбування квадратів 10×10 та 12×12.

Зрозуміло, що такий процес може бути продовжений до нескінченності, і в цей спосіб можна перефарбувати у протилежний колір навіть всі клітинки «шахової площини».

Зауважимо тільки, що для перефарбування дошки $2n \times 2n$ нам потрібно буде вибрати $2(1+2+\ldots+n) = n(n+1)$ клітинок.

Додатково розглянемо питання про перефарбування клітинок квадрата розмірами $(2n+1)\times(2n+1)$ і доведемо, що здійснити його не вдасться. Для цього розфарбуємо його клітинки, як на рисунку, зображеному нижче на прикладі $n = 4$.



Перефарбувати всі клітинки такого квадрата у протилежний колір не можна, бо помічених темним кольором клітинок непарна кількість, а за кожен хід або не буде перефарбовано жодної, або будуть перефарбовані дві з них.

Відзначимо також, що для можливості перефарбування форма дошки не обов'язково повинна бути квадратною. Наприклад, відкинувши в наведеній вище таблиці два останні стовпчики, отримаємо спосіб перефарбування дошки розмірами 10×12.

Також не обов'язково обидва чи навіть один вимір дошки повинен бути парним. Наведемо відповідні приклади (номерами позначені клітинки, які необхідно буде виділити для перефарбування):

1
2

	1	
	2	

1			3	
2			4	

1	2	

1	2			3	4	

Але, наприклад, для дошки розмірами 1×5 вказане перефарбування здійснити не вдасться.

14. У Петрика є можливість після кожного ходу Марійки пофарбувати принаймні одну дошку в той самий колір, що й сусідня з нею уже пофарбована дошка. Тому він зможе добитися, щоб однокольорових переходів було не менше 10. Аналогічно Марійка, починаючи зі свого другого ходу, фарбуючи при цьому кожен раз дошку у протилежний колір до однієї з сусідніх з нею, зможе добитися не менше 9 різнокольорових переходів. А оскільки всіх переходів є 19, то в кінцевому результаті паркан матиме саме 9 різнокольорових переходів.

Одним з варіантів досягнення описаного ефекту є, наприклад, послідовне фарбування Марійкою та Петриком дощок паркана зліва направо. При цьому чергуватимуться пари з двох блакитних та двох жовтих дощок.

Міркуючи аналогічно при фарбуванні паркана, який має $n=2k$ дощок, отримаємо, що після завершення фарбування паркан матиме $k-1$ різнокольорових переходів.

Відповідно для паркана, який складається $n=2k+1$ дощок, такими ж міркуваннями отримаємо k різнокольорових переходів.

Оскільки задача виявилася доволі простою, то для $n=2k$ наведемо ще один спосіб її розв'язування з використанням методу математичної індукції. Доведемо, що при кожному натуральному k перевага Петрика над Марійкою становитиме принаймні 1.

Для $k=1$ це очевидно – Петрикові достатньо тільки другу дошку пофарбувати в той самий колір, в який пофарбована Марійкою перша дошка.

Припустимо, що для всіх $k\le m$ йому вдається отримати у такому фарбуванні перевагу над Марійкою принаймні на 1.

Тоді для $k=m+1$ йому достатньо буде на перший хід Марійки відповісти фарбуванням у той самий колір сусідньої дошки таким чином, щоб з обох боків залишилася парна кількість нефарбованих дощок (або не залишалося жодної). Цим він зразу досягає перевагу на 1 над Марійкою. Далі, на кожній з двох частинок, які залишилися, згідно з припущенням у нього є можливість збільшити свою перевагу ще принаймні на 1. Але, враховуючи, що при цьому могли появитися різнокольорові переходи поруч з двома першими пофарбованими дошками, гарантована перевага Петрика над Марійкою дорівнює лише 1.

Звідси випливає, що для кожного натурального k Петрик зможе випередити Марійку принаймні на 1. Якщо при цьому Марійка, наприклад, буде дотримуватися описаної вище стратегії, то паркан матиме $k-1$ різнокольорових переходів.

Щодо інших ходів Петрика, то він може або поступати так, як описано вище, або ж, узгоджуючи свої дії з цим методом доведення, кожен раз фарбувати деяку дошку в один колір з довільною сусідньою уже пофарбованою дошкою таким чином, щоб після його ходу з іншого боку пофарбованої ним дошки залишалася парна кількість нефарбованих дощок (або не залишалося жодної). Зрозуміло, що така стратегія Петрика є частковим випадком стратегії, наведеної першою.

15. Оскільки в обох сторін має бути рівно один король, то королі можуть бути позначені лише буквами «к» та «К».

Буквами «р» та «Р» не може бути позначений ферзь, бо неможливі одночасні шахи різним королям.

Буквою «Р» не може бути позначений слон, бо попасти на поле a5 своїм останнім ходом він не міг, а якщо він попав туди раніше, то король суперника не мав права опинитися на полі b6.

Буквою «р» не може бути позначений кінь, бо попасти на поле a2 своїм останнім ходом він не міг, а якщо він попав туди раніше, то король суперника не мав права опинитися на полі c3.

Також буквою «р» не може бути позначений пішак, бо на полі c1, він зобов'язаний був перетворитися в деяку фігуру.

Тому буквами «р» та «Р» позначені тури.

Буквою «а» не можуть бути позначені ні ферзь, ні слон через неможливість одночасних шахів цими фігурами королю на полі c3.

Оскільки, крім того, «а» не позначає туру (бо тури позначені буквами «р» та «Р») і не позначає пішака (бо пішак на полі е1 мав перетворитися в деяку фігуру), то буквою «а» позначений кінь.

Буквою «У» не може позначений ферзь, бо неможливі одночасні шахи двом королям.

Оскільки, крім того, «У» не позначає ні туру, ні коня (бо ці фігури вже позначені іншими буквами), а також не позначає пішака (бо на b8 він мав перетворитися в деяку фігуру), то буквою «У» позначений слон.

Враховуючи сказане і те, що на полі а1 «ї» не може бути пішаком, отримуємо, що буквою «ї» позначений ферзь.

Тоді для букви «н» залишається єдина можливість позначати пішака.

Залишилося тільки пояснити можливість одночасних шахів королю на полі с3 ферзем з поля а1 та турою з поля с1. Таке могло статися в єдиному випадку, якщо останнім зробленим в цій партії ходом чорний пішак з поля b2 збив деяку фігуру білих на полі с1 і перетворився в туру.

Звідси, зокрема, випливає, що великими буквами позначені білі фігури, а малими – чорні.

Остаточно відновлена позиція має такий вигляд:

16. Позначимо через V_m кількість перестановок із m елементів, в яких жоден елемент не залишається на своєму місці. Очевидно, що $V_1 = 0$. Для зручності також покладемо, що $V_0 = 1$.

Виведемо формулу для обчислення $V_m,\, m \geq 2$. Позначимо через A_i множину перестановок, в яких $i-$тий елемент залишається на своєму місці. Вона складається з $(m-1)!$ елементів.

Перетин p із m множин A_i містить $(m-p)!$ елементів, а всього таких перетинів є C_m^p. Тому за формулою включень-виключень отримаємо число $W_m,\, m \geq 2,$ перестановок, в яких хоч один елемент залишається на своєму місці:

$$W_m = C_m^1(m-1)! - C_m^2(m-2)! + C_m^3(m-3)! - \ldots + (-1)^{m-1} \cdot 1 =$$
$$= m!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{1}{m!}\right).$$

Оскільки всіх перестановок із m елементів є $m!$, то

$$V_m = m! - m!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{1}{m!}\right) = m!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^m\frac{1}{m!}\right).$$

Оскільки ті k елементів, які залишаються на своїх місцях, можна вибрати $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ способами, то за правилом множення отримаємо

$$U_k = C_n^k \cdot V_{n-k} = \frac{n!}{k!}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\right),\ n-k \geq 2.$$

Крім того $U_{n-1} = C_n^{n-1} \cdot V_1 = 0$ та $U_n = C_n^n \cdot V_0 = 1$.

Надалі для зручності позначимо U_k, про які йде мова в умові задачі, через $U_k^{(n)}$, а для кількості перестановок множини із $n+1$ елементів, в яких k елементів залишаються на своїх місцях, використаємо позначення $U_k^{(n+1)}$.

З врахуванням записаних вище рівностей отримаємо

$$U_k^{(n+1)} = (n+1)U_k^{(n)} + (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k,\ k \leq n, \text{ та } U_{n+1}^{(n+1)} = 1.$$

Перейдемо тепер до доведення рівності

$$\sum_{k=1}^{n} kU_k^{(n)} = n! \qquad (*)$$

Для $n=1$ вона правильна, бо $\sum_{k=1}^{1} kU_k^{(1)} = 1\cdot 1 = 1!$

Припустимо справедливість рівності (*) для деякого $n \geq 1$. Тоді для $n+1$ отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n+1} kU_k^{(n+1)} = (n+1)\sum_{k=1}^{n} kU_k^{(n)} + (n+1)U_{n+1}^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} k(-1)^{n+1-k} C_{n+1}^{k} =$$

$$= (n+1)n! + \sum_{k=1}^{n+1} k(-1)^{n+1-k} C_{n+1}^{k}.$$

Оскільки $C_{n+1}^{k} = \frac{n+1}{k} C_n^{k-1}$, то з врахуванням формули бінома Ньютона

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(-1)^{n+1-k} C_{n+1}^{k} = (n+1)\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} C_n^{k-1} =$$

$$= (n+1)\sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} C_n^{p} = (n+1)(1-1)^n = 0.$$

Тому $\sum_{k=1}^{n+1} kU_k^{(n+1)} = (n+1)!$, звідки внаслідок принципу математичної індукції випливає справедливість рівності (*) для всіх натуральних n.

Як узагальнення задачі, для $n \geq 2$ доведемо наступну рівність

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 U_k^{(n)} = 2\cdot n!\,, \qquad (**)$$

яка пропонувалася на заключному етапі турніру. (Для $n=1$ вона не справджується, бо $1 \neq 2$. Причину цього ми встановимо нижче.)

Для $n=2$ справджується рівність $\sum_{k=1}^{2} k^2 U_k^{(2)} = 1^2\cdot 0 + 2^2 \cdot 1 = 2\cdot 2!$

Припустимо справедливість рівності (**) для деякого $n \geq 2$.

Тоді для $n+1$ отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 U_k^{(n+1)} = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k^2 U_k^{(n)} + (n+1)^2 U_{n+1}^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} k^2 (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^{k} =$$

$$=2\cdot(n+1)\cdot n!+\sum_{k=1}^{n+1}k^2(-1)^{n+1-k}C_{n+1}^{k}.$$

Оскільки $C_{n+1}^{k}=\dfrac{n+1}{k}C_n^{k-1}$, то з врахуванням отриманого вище маємо

$$\sum_{k=1}^{n+1}k^2(-1)^{n+1-k}C_{n+1}^{k}=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}k(-1)^{n+1-k}C_n^{k-1}=$$

$$=(n+1)\left(\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)(-1)^{n+1-k}C_n^{k-1}+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}C_n^{k-1}\right)=$$

$$=(n+1)\left(\sum_{p=0}^{n}p(-1)^{n-p}C_n^{p}+\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}C_n^{p}\right)=$$

$$=(n+1)\left(n\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-1-s}C_{n-1}^{s}+\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}C_n^{p}\right)=$$

$$=(n+1)\left(n(1-1)^{n-1}+(1-1)^{n}\right)=0.$$

Тому $\sum_{k=1}^{n+1}k^2U_k^{(n+1)}=2\cdot(n+1)!$, звідки внаслідок принципу математичної індукції випливає справедливість рівності (**) для всіх натуральних $n\geq 2$.

Враховуючи наявність множника $(1-1)^{n-1}$, стає зрозумілим, чому така рівність не справджувалася для $n=1$.

У загальному випадку справедливе таке твердження: при кожному фіксованому натуральному m для всіх $n\geq m$

$$\frac{1}{n!}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^mU_k^{(n)}=const.$$

При цьому константи у правій частині цієї рівності є так званими числами Белла, які визначаються рівностями: $B_0=1$ та $B_m=\sum_{i=0}^{m-1}C_{m-1}^{i}B_i$ для $m\geq 1$. Числа Белла утворюють послідовність:

1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 887, ...

17. Будемо розв’язувати загальнішу задачу, вимагаючи, щоб кожні два доданки такої суми були взаємно простими.

Доведемо таке узагальнене твердження: для довільного $m \geq 2$ існує таке число n таке, що кожне натуральне число, яке перевищує n, можна розбити на m попарно взаємно простих доданків, які більші за 1.

Для його доведення скористаємося посиленим постулатом Бертрана: між числами N та $1{,}5N$, де $N \geq 2$ завжди існує просте число.

Нехай $n = 2 \cdot 16^{m-1}$, $k > 2 \cdot 16^{m-1}$. Між числами $\frac{10}{16}k$ та $\frac{15}{16}k$ виберемо просте число p_m. Тоді $\frac{1}{16}k \leq k - p_m \leq \frac{6}{16}k$, тобто $2 \cdot 16^{m-2} < k - p_m < p_m$.

Аналогічно між числами $\frac{10}{16}(k - p_m)$ та $\frac{15}{16}(k - p_m)$ виберемо просте число p_{m-1}, причому $p_{m-1} < p_m$.

Продовжуючи цю процедуру, отримаємо прості числа $p_2 < \ldots < p_{m-1} < p_m$, причому $2 \leq k - p_2 - \ldots - p_{m-1} - p_m < p_2$, тобто доданки $k - p_2 - \ldots - p_{m-1} - p_m,\ p_2, \ldots,\ p_{m-1},\ p_m$ взаємно прості, й більші за 1.

Наприклад для $m = 5$ та числа $k = 200000 > 2 \cdot 16^4$ шукаємо просте число p_5 між числами 125000 та 187500. Візьмемо $p_5 = 150001$. Тоді $k - p_5 = 200000 - 150001 = 49999$.

Шукаємо просте число p_4 між числами 31249 та 46874. Візьмемо $p_4 = 40009$. Тоді $k - p_5 - p_4 = 49999 - 40009 = 9990$.

Шукаємо просте число p_3 між числами 6243 та 9365. Візьмемо $p_3 = 9349$. Тоді $k - p_5 - p_4 - p_3 = 9990 - 9349 = 641$.

Шукаємо просте число p_2 між числами 400 та 600. Візьмемо $p_4 = 401$. Тоді $k - p_5 - p_4 - p_3 - p_2 = 641 - 401 = 240$.

Отже, отримуємо таке розбиття:

$$200000 = 240 + 401 + 9349 + 40009 + 150001.$$

Зрозуміло, що отримане при цьому способі розв'язування задачі знайдене число n не є найменшим з можливих.

У випадку п'яти доданків вкажемо спосіб пошуку найменшого з таких n.

Нехай три перші доданки – це 2, 3 та 5. З'ясуємо, які натуральні числа можна подати у вигляді суми двох більших за 1 взаємно простих між собою натуральних чисел, не кратних 2, 3, 5. Зрозуміло, що ці числа, як суми двох непарних доданків повинні бути парними.

Щоб такі доданки не були кратними ні 2, ні 3, ні 5, їх остача при діленні на 30 також не має бути кратною 2, 3, 5. Серед можливих остач такими є: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 та 29.

Для довільного натурального m розглянемо представлення:

$$60m=(30m-1)+(30m+1),$$

$$60m+2=(30m-11)+(30m+13),\quad 60m-2=(30m-13)+(30m+11),$$
$$60m+4=(30m-7)+(30m+11),\quad 60m-4=(30m-11)+(30m+7),$$
$$60m+6=(30m-1)+(30m+7),\quad 60m-6=(30m-7)+(30m+1),$$
$$60m+8=(30m-11)+(30m+19),\quad 60m-8=(30m-19)+(30m+11),$$
$$60m+10=(30m-1)+(30m+11),\quad 60m-10=(30m-11)+(30m+1),$$
$$60m+12=(30m+1)+(30m+11),\quad 60m-12=(30m-1)+(30m-11),$$
$$60m+14=(30m+1)+(30m+13),\quad 60m-14=(30m-1)+(30m-13),$$
$$60m+16=(30m-1)+(30m+17),\quad 60m-16=(30m+1)+(30m-17),$$
$$60m+18=(30m+7)+(30m+11),\quad 60m-18=(30m-7)+(30m-11),$$
$$60m+20=(30m+7)+(30m+13),\quad 60m-20=(30m-7)+(30m-13),$$
$$60m+22=(30m-1)+(30m+23),\quad 60m-22=(30m+1)+(30m-23),$$
$$60m+24=(30m+11)+(30m+13),\quad 60m-24=(30m-11)+(30m-13),$$
$$60m+26=(30m+7)+(30m+19),\quad 60m-26=(30m-7)+(30m-19),$$
$$60m+28=(30m+11)+(30m+17),\quad 60m-28=(30m-11)+(30m-17),$$

$$60m-30=(30m-11)+(30m-19).$$

Всі виписані тут доданки не кратні ні 2, ні 3, ні 5 і в кожній записаній парі – взаємно прості між собою. Справді, якщо б якась пара доданків мала спільний дільник, то й їх різниця ділилась би на нього. Але легко перевірити, що такі різниці відмінних від 2, 3, 5 дільників не мають.

Звідси випливає, що кожне парне число, починаючи з 30 можна подати вказаним способом у вигляді потрібної суми двох доданків. А враховуючи ще й доданки 2, 3, 5, отримаємо потрібні представлення п'ятьма доданками для всіх парних чисел $k \geq 40$.

Щоб отримати непарні числа, покладемо перші два доданки рівними 3 та 5 і з'ясуємо, які непарні натуральні числа можна подати у вигляді суми трьох більших за 1 взаємно простих між собою натуральних чисел, не кратних 3 та 5.

Для довільного натурального m розглянемо представлення:

$90m+1=(30m-1)+(30m-17)+(30m+19)$,

$90m-1=(30m+1)+(30m+17)+(30m-19)$,

$90m+3=(30m-1)+(30m-7)+(30m+11)$,

$90m-3=(30m+1)+(30m+7)+(30m-11)$,

$90m+5=(30m+1)+(30m-7)+(30m+11)$,

$90m-5=(30m-1)+(30m+7)+(30m-11)$,

$90m+7=(30m+1)+(30m-7)+(30m+13)$,

$90m-7=(30m-1)+(30m+7)+(30m-13)$,

$90m+9=(30m+1)+(30m-11)+(30m+19)$,

$90m-9=(30m-1)+(30m+11)+(30m-19)$,

$90m+11=(30m-1)+(30m+1)+(30m+11)$,

$90m-11=(30m+1)+(30m-1)+(30m-11)$,

$90m+13=(30m-17)+(30m+7)+(30m+23)$,

$90m-13=(30m+17)+(30m-7)+(30m-23)$,

$90m+15=(30m-1)+(30m-7)+(30m+23)$,

$90m-15=(30m+1)+(30m+7)+(30m-23)$,

$90m+17=(30m-1)+(30m+1)+(30m+17)$,

$90m-17=(30m+1)+(30m-1)+(30m-17)$,

$90m+19=(30m-1)+(30m+1)+(30m+19)$,

$$90m-19=(30m+1)+(30m-1)+(30m-19),$$
$$90m+21=(30m-13)+(30m+11)+(30m+23),$$
$$90m-21=(30m+13)+(30m-11)+(30m-23),$$
$$90m+23=(30m-7)+(30m+13)+(30m+17),$$
$$90m-23=(30m+7)+(30m-13)+(30m-17),$$
$$90m+25=(30m+1)+(30m+7)+(30m+17),$$
$$90m-25=(30m-1)+(30m-7)+(30m-17),$$
$$90m+27=(30m+1)+(30m+7)+(30m+19),$$
$$90m-27=(30m-1)+(30m-7)+(30m-19),$$
$$90m+29=(30m+1)+(30m+11)+(30m+17),$$
$$90m-29=(30m-1)+(30m-11)+(30m-17),$$
$$90m+31=(30m+1)+(30m+11)+(30m+19),$$
$$90m-31=(30m-1)+(30m-11)+(30m-19),$$
$$90m+33=(30m+1)+(30m+13)+(30m+19),$$
$$90m-33=(30m-1)+(30m-13)+(30m-19),$$
$$90m+35=(30m+7)+(30m+11)+(30m+17),$$
$$90m-35=(30m-7)+(30m-11)+(30m-17),$$
$$90m+37=(30m+7)+(30m+13)+(30m+17),$$
$$90m-37=(30m-7)+(30m-13)+(30m-17),$$
$$90m+39=(30m+7)+(30m+13)+(30m+19),$$
$$90m-39=(30m-7)+(30m-13)+(30m-19),$$
$$90m+41=(30m+7)+(30m+11)+(30m+23),$$
$$90m-41=(30m-7)+(30m-11)+(30m-23),$$
$$90m+43=(30m+7)+(30m+13)+(30m+23),$$
$$90m-43=(30m-7)+(30m-13)+(30m-23),$$
$$90m+45=(30m-1)+(30m+17)+(30m+29).$$

Всі виписані тут доданки не кратні ні 2, ні 3, ні 5 і в кожній записаній парі – взаємно прості між собою. Справді, якщо б якась пара доданків мала спільний дільник, то й їх різниця ділилась би на нього. Але легко перевірити, що такі різниці відмінних від 2, 3 та 5 дільників не мають.

Звідси випливає, що кожне парне число, починаючи з 47 можна подати вказаним способом у вигляді суми трьох доданків. А враховуючи ще й доданки 3 та 5, отримаємо потрібні представлення п’ятьма доданками для всіх непарних чисел $k \geq 55$.

Об’єднуючи ці два випадки, приходимо до висновку, що потрібні представлення у вигляді суми п’яти попарно взаємно простих більших за 1 натуральних доданків існують для всіх $k > n = 53$.

Зауважимо, що $n = 53$ ще не є найменшим з можливих. Потрібні представлення існують також для чисел:

$$53 = 3+7+11+13+19,\ 51 = 3+7+11+13+17,\ 49 = 3+5+11+13+17,$$
$$47 = 3+5+7+13+19,\ 45 = 3+5+7+11+19,\ 43 = 3+5+7+11+17.$$

При цьому з останньої рівності зрозуміло, що для числа 41 такого представлення не існує.

Тому, враховуючи сказане вище, найменшим буде $n = 41$, щоб всі числа більші за нього можна було розбити на п’ять попарно взаємно простих доданків, які більші за 1.

18. Нехай $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ – канонічний розклад числа m на множники. Тоді кількість його дільників $d = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_k + 1)$.

Оскільки

$$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17 = 510510, \qquad 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19 > 1000000,$$

то $k \leq 7$. При цьому для числа $m = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17 = 510510$ маємо $d = 2^7 = 128$. Таке ж значення d отримаємо і для інших допустимих чисел з $k = 7$.

Розглянемо тепер випадок $k = 6$. Вилучивши з попереднього канонічного розкладу множник 17, нескладно отримати наступне допустиме число m, канонічний розклад якого має вигляд $m = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5\cdot7\cdot11\cdot13 = 720720$, для якого $d = 5\cdot3\cdot2^4 = 240$.

Отримати для $k=6$ більше значення не вдасться, бо, наприклад, використовуючи ще й 5^2 за рахунок зменшення степеня числа 2, отримаємо $m=2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13=900900$, для якого $d=3^3\cdot 2^3=216$.

Проте для $k=6$ заміною 13 на 17 можна отримати ще одне допустиме число $m=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 17=942480$ з $d=5\cdot 3\cdot 2^4=240$.

Нехай тепер $k=5$. Обмежуючись простими дільниками 2, 3, 5, 7, 11, отримуємо ще два допустимі числа з $d=240$:

$$m=2^5\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11=999920,\ d=6\cdot 5\cdot 2^3=240,$$

та

$$m=2^4\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11=831600,\ d=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2^2=240.$$

Замінивши в останньому з них 11 на 13, знайдемо п’яте число $m=2^4\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13=982800$, для якого $d=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2^2=240$.

Дальші зменшення k до збільшення d не приведуть, бо кожне зменшення k на 1, отримане відкиданням одного простого дільника, наприклад, дільника 11 чи 13, зменшує d вдвічі. Але простим перебором нескладно переконатися, що компенсувати це зменшення за рахунок збільшення степенів менших простих дільників чисел $m<1000000$ не вдасться.

Таким чином, щонайбільше може бути 240 різних дільників. Саме стільки їх мають 5 наведених вище чисел $m<1000000$.

Зауважимо, що програмно нескладно було б організувати й повний перебір канонічних розкладів чисел $m<1000000$ для всіх $k\le 7$. При цьому для визначення максимальних степенів, з якими простий дільник може входити в канонічний розклад, слід врахувати наступні нерівності:

$$2^{19}<1000000<2^{20},\ 3^{12}<1000000<3^{13},\ 5^8<1000000<5^9,$$
$$7^7<1000000<7^8,\ 11^5<1000000<11^6,\ 13^5<1000000<13^6,$$
$$17^4<1000000<17^5.$$

19. Оскільки послідовність a_{2k} є монотонно зростаючою, послідовність a_{2k+1} – монотонно спадною, то для існування границі необхідно, щоб всі елементи з непарними номерами були більшими кожного елемента з парним індексом.

З нерівності $2 \le \dfrac{a_1 - a_0}{a_1 - a_2} \le 3 \Leftrightarrow 2 \le \dfrac{1-0}{1-a_2} \le 3$ маємо $\dfrac{3}{6} \le a_2 \le \dfrac{4}{6}$.

Враховуючи сказане вище, з нерівностей

$$2 \le \frac{a_{2k} - a_{2k-1}}{a_{2k} - a_{2k+1}} \le 3 \qquad \text{та} \qquad 2 \le \frac{a_{2k+1} - a_{2k}}{a_{2k+1} - a_{2k+2}} \le 3$$

отримаємо оцінки

$$\frac{a_{2k-1} + 2a_{2k}}{3} \le a_{2k+1} \le \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2} \qquad \text{та} \qquad \frac{a_{2k} + a_{2k+1}}{2} \le a_{2k+2} \le \frac{a_{2k} + 2a_{2k+1}}{3}$$

відповідно.

Зокрема, при $k = 1$ знайдемо, що $\dfrac{4}{6} \le a_3 \le \dfrac{5}{6}$.

Далі, припускаючи, що

$$\frac{3x_k}{6^k} \le a_{2k} \le \frac{4y_k}{6^k} \qquad \text{та} \qquad \frac{2z_k}{6^k} \le a_{2k+1} \le \frac{t_k}{6^k},$$

з отриманих вище оцінок будемо мати

$$\frac{3(3x_k + 2z_k)}{6^{k+1}} \le a_{2k+2} \le \frac{4(t_k + 2y_k)}{6^{k+1}} \qquad \text{та} \qquad \frac{2(3x_k + 4z_k)}{6^{k+1}} \le a_{2k+3} \le \frac{5t_k + 4y_k}{6^{k+1}}$$

відповідно.

Таким чином, для знаходження чисел x_k, y_k, z_k, t_k отримуємо такі дві системи рекурентних співвідношень:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + 2z_k, \\ z_{k+1} = 3x_k + 4z_k, \end{cases} \qquad \text{та} \qquad \begin{cases} y_{k+1} = 2y_k + t_k, \\ t_{k+1} = 4y_k + 5t_k, \end{cases}$$

причому, враховуючи оцінки для a_2 та a_3, маємо

$$x_1 = 1,\ y_1 = 1,\ z_1 = 2,\ t_1 = 5.$$

А з записаних систем одержуємо також

$$x_2 = 7,\ y_2 = 7,\ z_2 = 11,\ t_2 = 29.$$

З другого рівняння першої системи знаходимо $x_k = \dfrac{z_{k+1} - 4z_k}{3}$. Тоді $x_{k+1} = \dfrac{z_{k+2} - 4z_{k+1}}{3}$. Підставляючи їх у перше рівняння цієї системи, отримаємо різницеве рівняння $z_{k+2} - 7z_{k+1} + 6z_k = 0$, для якого коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ є числа $\lambda_1 = 1$ та $\lambda_2 = 6$. Тому $z_k = C_1 + C_2 \cdot 6^k$. Враховуючи значення $z_1 = 2$ та $z_2 = 11$, з системи рівнянь $\begin{cases} C_1 + 6C_2 = 2, \\ C_1 + 36C_2 = 11, \end{cases}$ знайдемо $C_1 = \frac{2}{10}$ та $C_2 = \frac{3}{10}$. Отже, остаточно отримуємо $z_k = \frac{2 + 3\cdot 6^k}{10}$ та далі знаходимо $x_k = \frac{-2 + 2\cdot 6^k}{10}$.

Так само, виражаючи з першого рівняння другої системи $t_k = y_{k+1} - 2y_k$, прийдемо до аналогічного різницевого рівняння $y_{k+2} - 7y_{k+1} + 6y_k = 0$. Тому $y_k = C_1 + C_2 \cdot 6^k$. Враховуючи значення $y_1 = 1$ та $y_2 = 7$, з системи рівнянь $\begin{cases} C_1 + 6C_2 = 1, \\ C_1 + 36C_2 = 7, \end{cases}$ знайдемо $C_1 = -\frac{2}{10}$ та $C_2 = \frac{2}{10}$. Тоді $y_k = \frac{-2 + 2\cdot 6^k}{10}$ і також знаходимо $t_k = \frac{2 + 8\cdot 6^k}{10}$.

Повертаючись до нерівностей $\frac{3x_k}{6^k} \le a_{2k} \le \frac{4y_k}{6^k}$ та $\frac{2z_k}{6^k} \le a_{2k+1} \le \frac{t_k}{6^k}$, отримуємо наступні оцінки для елементів заданої послідовності:

$$\frac{3\cdot\frac{-2+2\cdot 6^k}{10}}{6^k} \le a_{2k} \le \frac{4\cdot\frac{-2+2\cdot 6^k}{10}}{6^k} \quad \text{та} \quad \frac{2\cdot\frac{2+3\cdot 6^k}{10}}{6^k} \le a_{2k+1} \le \frac{\frac{2+8\cdot 6^k}{10}}{6^k}.$$

Перейшовши в цих подвійних нерівностях до границі при $k \to \infty$, отримуємо $\frac{3}{5} \le \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} \le \frac{4}{5}$ та $\frac{3}{5} \le \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} \le \frac{4}{5}$. В цих же ж межах буде знаходитися і границя заданої послідовності.

Для кожного $a \in \left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$ нескладно навести приклад такої послідовності, яка збігається до a і задовольняє умови задачі:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{2n} = a - \frac{a}{6^n} \text{ та } a_{2n+1} = a + \frac{1-a}{6^n}.$$

Зауважимо, що для аналогічної послідовності, елементи якої при всіх $n \ge 1$ задовольняють нерівність $m \le \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n - a_{n+1}} \le M$, $1 < m \le M$, її границя $a \in \left[\frac{Mm-M}{Mm-1}, \frac{Mm-m}{Mm-1}\right]$.

Якщо $a-$ довільне число з цього проміжку, то прикладом послідовності, яка збігається до a і задовольняє вказану нерівність є:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{2n} = a - \frac{a}{(Mm)^n} \text{ та } a_{2n+1} = a + \frac{1-a}{(Mm)^n}.$$

20. Вважатимемо, що розглядаються прямокутники, сторони яких паралельні до сторін квадрата і припустимо, що в $i-$тому стовпчику знаходиться a_i фішок. Кожній з $C_{a_i}^2$ пар фішок цього стовпчика відповідає пара рядків, що проходять через цю пару фішок. Зауважимо, що ця пара рядків не перетинає жоден інший стовпчик в двох фішках. Таких пар рядків по всіх стовпчиках буде $\sum_{i=1}^{n} C_{a_i}^2$. З іншої сторони, всього пар рядків C_n^2. Отже, маємо нерівність $\sum_{i=1}^{n} C_{a_i}^2 \le C_n^2$.

Звідси $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le n^2 - n + \sum_{i=1}^{n} a_i$ і з нерівності про середні отримуємо:

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le n^2 - n + \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - n\left(\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + n\left(\sqrt{n-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\right)\right) \le 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \le n\left(\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right).$$

Така оцінка трохи краща, ніж $n\left(\sqrt{n}+1\right)$.

Додатково розглянемо питання до цієї задачі з заключного етапу Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка про розміщення $n\left(\left[\sqrt{n}\right]+1\right)$ фішок на дошці $n \times n$ так, щоб жодні чотири фішки не стояли у вершинах прямокутника?

Нехай $n = k^2 + a$, де $k-$ натуральне число, $0 \le a \le 2k$. Тоді піднесенням до квадрату отримуємо нерівності:

$$\left[n\left(\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right)\right]<n\left([\sqrt{n}]+1\right) \text{ для } 0\le a\le k,$$

$$\left[n\left(\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right)\right]=n\left([\sqrt{n}]+1\right) \text{ для } a=k+1,$$

$$\left[n\left(\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right)\right]\ge n\left([\sqrt{n}]+1\right) \text{ для } k+2\le a\le 2k,$$

В першому випадку розв’язків, очевидно, немає.

Пропонуємо читачам самостійно навести приклад розташування шести безконфліктних фішок на дошці розмірами 3×3 $(k=1)$ та виявити можливість розміщення $n\left(\left[\sqrt{n}\right]+1\right)$ безконфліктних фішок на дошках розмірами 4×4, 5×5, 6×6

А нижче для другого та третього випадків наводимо приклади такого розміщення з дошками розмірами 7×7, 8×8 $(k=2)$ та 13×13, 15×15 $(k=3)$:

	+	+				+
+	+				+	
+				+		+
			+		+	+
		+		+	+	
	+		+	+		
+		+	+			

	+	+					+
+	+					+	
+					+		+
				+		+	+
			+		+	+	
		+		+	+		
	+		+	+			
+		+	+				

	+						+				+	+
+						+				+	+	
					+				+	+		+
				+				+	+		+	
			+				+	+		+		
		+				+	+		+			
	+				+	+		+				
+				+	+		+					
			+	+		+						+
		+	+		+						+	
	+	+		+						+		
+	+		+						+			
+		+						+				+

	+						+				+			+
+						+				+			+	
					+				+			+		+
				+				+			+		+	
			+				+			+		+		
		+				+			+		+			
	+				+			+		+				
+				+			+		+					
			+			+		+						+
		+			+		+						+	
	+			+		+						+		
+			+		+						+			
		+		+						+				+
	+		+						+				+	
+		+						+				+		