III етап Всеукраїнської олімпіади юних математиків

Умови та розв'язки по усіх класах

1 тур

7 клас

1. **(Фольклор)**

Олеся записала натуральне число N. Після цього Андрійко записав одну шосту, одну п'яту, одну четверту, одну третю та одну другу від числа N. Виявилось, що сума усіх записаних чисел є цілим числом. Яке найменше число могла записати Олеся?

Відповідь: 20.

Розв'язання. Андрійко отримав таку суму: $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)N=\frac{29N}{20}$, а воно буде цілим за умови, що N ділиться на 20, тобто найменшим числом є число 20.

2. **(Фольклор)**

До натурального числа N справа дописали дві різні ненульові цифри. Виявилось, що одержане число ділиться націло на N. При якому найбільшому N це можливо?

Відповідь: 98.

Розв'язання. Нехай справа дописати цифри, які утворюють число $\overline{ab}$. За умовою задачі випливає, що $\overline{Nab}\,\vdots\,N$, або $100N+\overline{ab}\,\vdots\,N$, звідки $\overline{ab}\,\vdots\,N$. Оскільки число $\overline{ab}$ утворене двома різними цифрами, то $a\le 98$, тому й $N\le 98$. А число $N=98$ задовольняє умову задачі. Дійсно, до числа 98 можна приписати цифри 9 та 8, і одержане число 9898 ділиться на 98, тобто воно задовольняє умову.

3. **(Рубльов Богдан)**

а) Прямокутник $ABCD$ розрізано на декілька квадратів, периметр кожного з яких дорівнює цілому числу сантиметрів. Чи обов'язково і периметр прямокутника $ABCD$ також визначається цілим числом сантиметрів?

б) Квадрат $ABCD$ розрізано на декілька квадратів, периметр кожного з яких дорівнює цілому числу сантиметрів. Чи обов'язково і периметр квадрата $ABCD$ також визначається цілим числом сантиметрів?

Розв'язання. а) тут достатньо навести приклад. Розглянемо два квадрати $ABMN$ та $NMCD$ зі стороною $\frac{1}{4}$. Тоді периметр кожного з квадратів складає ціле число сантиметрів – 1, а от периметр прямокутника $ABCD$ складає $2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$ – не ціле число.

б) Розглянемо будь-яку сторону зовнішнього квадрату, до неї прилягають декілька менших квадратів (рис.1). Нехай сторона зовнішнього квадрату a, а сторони менших квадратів дорівнюють $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тоді можемо записати, що сторона a дорывнює сумі сторін $a=a_1+a_2+\ldots+a_n$, але кожна сторона a_i, якщо її помножити на 4, дає ціле, тому й периметр P квадрата $ABCD$ є $P=4a=4a_1+4a_2+\ldots+4a_n$ – ціле число, оскільки оскільки кожний доданок є цілим.

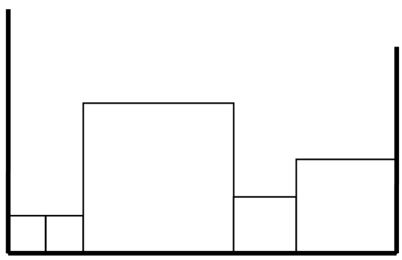

Рис. 1

4. **(Чорний Максим)**

Назвемо контуром чотири відрізки довжини 1, які обмежують квадрат 1×1. Автомат за одну операцію може пофарбувати будь-який контур. Яку найменшу кількість операцій повинен зробити автомат, щоб пофарбувати усі зовнішні та внутрішні лінії сітки прямокутника 2010×2011?

Контури, які фарбує автомат можуть мати спільні точки та відрізки, а також виходити за межі прямокутника.

Відповідь: 2025074.

Розв'язання. Зрозуміло, що кожний відрізок зовнішньої межі квадрату треба пофарбувати, а на це щонайменше потрібно $2 \cdot 2011 + 2 \cdot 2010 - 4 = 8038$ операцій автомата (рис.2).
Треба також пофарбувати і внутрішній прямокутник розміром 2008×2009, що залишився, можливо без зовнішньої межі. Розіб'ємо усі квадрати внутрішнього прямокутника на доміно розміром 1×2. Внаслідок парності числа 2008 це завжди можна зробити. Тоді для фарбування одиничного відрізку, що розташований всередині доміно треба пофарбувати принаймні один з квадратів, які його утворюють.

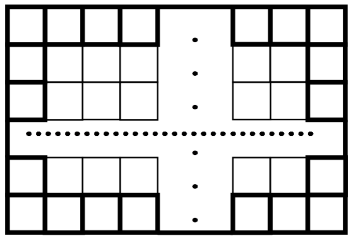

Рис. 2

Як легко бачити, якщо ми застосуємо автомат до кожного чорного квадратика з кожного доміно (рис.3), то ми пофарбуємо усі потрібні лінії, оскільки кожна лінія внутрішнього прямокутника є межею деякого чорного квадратика. Загальна кількість доміно у прямокутнику дорівнює: $\frac{2008 \cdot 2009}{2} = 2017036$. Отже остаточна кількість операцій автомата: 2017036+8038=2025074.

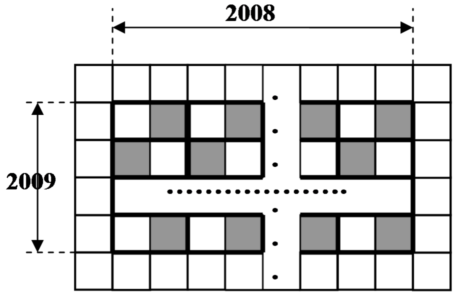

Рис. 3

3.1. **(Фольклор)**

Квадрат розрізаний на 4 однакових прямокутники та 1 квадрат, як це показано на рис.4. Відомо, що площа меншого квадрата дорівнює 16, а площа кожного прямокутника – 96. Визначіть сторони прямокутника.

Відповідь: Сторони прямокутника 8 та 12.

Розв'язання. Зрозуміло, що сторона внутрішнього квадрата дорівнює 4, а різниця сторін прямокутника і дорівнює стороні цього квадрата. Тому можемо позначити сторони прямокутника через x та $x + 4$. Площа великого прямокутника складає $16 + 96 \cdot 4 = 400$, тобто сторона 20. Легко побачити, що сторона великого квадрату складається з Двох менших сторін прямокутника та сторони малого квадрата, тобто маємо для знаходження x так рівняння: $2x + 4 = 20$. Звідси менша сторона дорівнює $x = 8$, а більша сторона – $x + 4 = 12$.

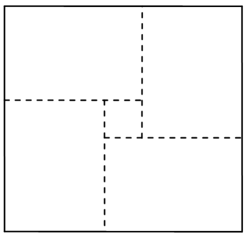

Рис. 4

4.1. **(Фольклор)**

Є 10 куп камінців, у яких знаходиться відповідно 3, 4, 5, ..., 12 камінців. За один хід дозволяється обрати довільні три купки камінців та додати у першу 1 камінець, у другу – 2, у третю – 3 камінці, або обрати довільні три купки камінців та забрати з першої купки 1 камінець, з другої – 2, з третьої – 3 камінці, при умові, що у обраних купках є достатня кількість камінців.

Чи можна за скінченну кількість ходів одержати ситуацію, при якій у кожній купці знаходиться рівно по 2011 камінців?

Відповідь: Не можна.

Розв'язання. При таких операціях сумарна кількість камінців в усіх купках змінюється на число, що кратне 3. У кінцевий момент це число дорівнює $2011 \cdot 10$ і не кратне 3. Але у початковий момент кількість камінців дорівнює $3 + 4 + 5 + \ldots + 12 = 75$, тобто число кратне 3. Одержана суперечність показує неможливість такого перетворення.

8 клас

1. **(Рубльов Богдан)**

Відмінниці Олесі задали додому обчислити суму двох звичайних нескоротних дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ (не обов'язково правильних). Її однокласник Андрійко хворів і перепитав це завдання телефоном, але не так почув і записав, що треба додати такі два дроби $\frac{b}{a}$ і $\frac{d}{c}$. Коли він їх додав, то запитав у Олесі відповідь. Виявилось, що відповіді співпали. Чи правильно додав свої дроби Андрійко, якщо Олеся одержала відмінну оцінку, а усі 4 дроби, що додавали Андрійко та Олеся, були попарно різними?

<u>Відповідь:</u> не правильно.

<u>Розв'язання.</u> Припустимо, що він додав їх правильно, тоді має місце рівність: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$, або $\frac{ad+bc}{bd}=\frac{bc+ad}{ac}$. Звідси випливає, що $bd=ac$, тобто $\frac{b}{a}=\frac{c}{d}$, що суперечить тому, що усі чотири дроби різні.

2. **(Фольклор)**

Знайдіть усі цілі числа n, які задовольняють рівність:

$$(n-1)(n-3)(n-5)\ldots(n-2011)=n(n+2)(n+4)\ldots(n+2010).$$

<u>Відповідь:</u> Таких цілих чисел не існує.

<u>Розв'язання.</u> Якщо замість n підставити парне число, то зліва число непарне, а справа – парне, і навпаки, якщо підставити непарне число, то зліва буде парне число, а справа – непарне, в обох випадках рівність неможлива.

3. **(Різні задачі)**

Числа a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 та b_1,b_2,b_3,b_4,b_5 є перестановками чисел $1,2,3,4,5$. Доведіть, що серед п'яти чисел $a_1b_1,a_2b_2,a_3b_3,a_4b_4,a_5b_5$ принаймні два дають однакову остачу при діленні на 5.

<u>Розв'язання.</u> Без обмеження загальності будемо вважати, що $a_5=5$. Якщо при цьому $b_5\neq 5$, то, наприклад, $b_4=5$ і тоді числа a_4b_4 та a_5b_5 кратні 5, тому дають однакову нульову остачу при діленні на 5. у цьому випадку твердження доведене.

Нехай тепер $b_5=5$. Припустимо, що твердження задачі не вірне. Тоді числа $a_1b_1,a_2b_2,a_3b_3,a_4b_4$ в деякому порядку дають остачі 1, 2, 3 та 4 при діленні на 5. Тоді з одного боку добуток чисел $a_1b_1\cdot a_2b_2\cdot a_3b_3\cdot a_4b_4$ дає при діленні на 5 остачу 4, що легко одержати, якщо розкрити дужки у рівності: $(5n_1+1)(5n_2+2)(5n_3+3)(5n_4+4)=5N+24$.

З іншого боку, оскільки числа a_1,a_2,a_3,a_4 та b_1,b_2,b_3,b_4 є перестановками чисел 1, 2, 3 та 4, то добуток $a_1b_1\cdot a_2b_2\cdot a_3b_3\cdot a_4b_4=24\cdot 24=576$ дає при діленні на 5 остачу 1. Одержана суперечність завершує доведення.

4. **(Веклич Богдан)**

Нехай $ABCD$ – вписаний чотирикутник. Позначимо середини сторін AB, BC, CD та DA через M,L,N та K відповідно. Виявилось, що $\angle BMN=\angle MNC$. Доведіть, що $\angle DKL=\angle CLK$.

Дивись розвязання задачі 9-4.

5. **(Анікушин Андрій – 13)**

В космічному квадраті з діагоналлю $A(0;0)B(10;10)$ космічний човен має доставити непоміченим секретний лист з точки A в точку B. Човну дозволяється рухатись таким чином: перебуваючи в точці $(n_1;m_1)$, де n_1,m_1 – цілі числа однакової парності, переміститись по прямій у будь-яку точку $(n_2;m_2)$, де $n_2>n_1$, $m_2>m_1$ та цілі числа n_2,m_2 також однакової парності. Вороги встановили радари, які дозволяють виявити човен. Зона покриття радарів показана стрілками на рисунку.

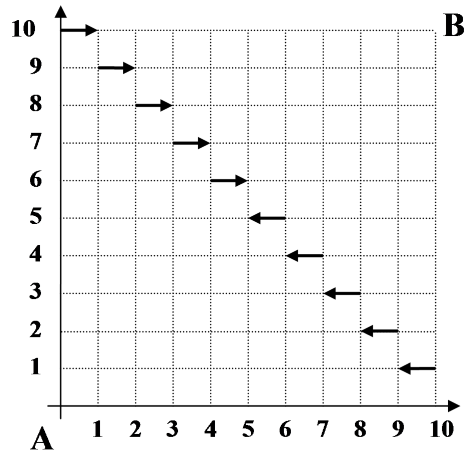

Рис. 5

Човен буде виявлений, якщо його траєкторія перетне зону дії радару (точка, у якій закінчується стрілка, не входить до зони покриття радару). Яких траєкторій руху космічного човна більше – тих, де човен буде виявлено чи тих, де човен помічено не буде?

<u>Відповідь:</u> траєкторій, де човен помічено не буде, більше.

Розв'язання. Додамо до відрізків, вздовж яких діє зона покриття радарів, ще низку вертикальних відрізків, щоб вони разом утворювали "сходи", як це показано на рис.6. Ці сходи розташовані у смузі між прямими $x + y = 10$ та $x + y = 11$. Зрозуміло, що будь-яка траєкторія перетинає ці сходи. При цьому човен перетинає сходи рівно 1 раз, оскільки кожним своїм ходом він збільшує абсцису та ординату щонайменше на 1, тому їх сума збільшується принаймні на 2.

Назвемо траєкторію, на якій радар помітить човен, небезпечними, а усі інші – безпечними. Таким чином, якщо траєкторія перетинає сходи у точці, в якій діє радар, то це траєкторія, де його буде виявлено, тобто небезпечна, а якщо у точці поза зоною дії радару, то це траєкторія, де човен помічено не буде – небезпечна траєкторія.

Розглянемо дві групи траєкторій: ті, що проходять через точку $(5, 5)$ і ті, що не проходять. Оскільки точка $(5, 5)$ – поза зоною, то усі траєкторії, що проходять через цю точку, безпечні.
Разом з кожною траєкторії $f(x)$ розглянемо також траєкторію $g(x)$, симетричну до $f(x)$ відносно прямої AB. Тобто, якщо одна з траєкторій проходить через точку $(a.b)$, то інша траєкторія проходить через точку (b, a).
Таким чином, якщо одна з цих двох траєкторій є небезпечною, тобто перетинає сходи у небезпечній точці $(a.b)$, то симетрична траєкторія проходить через точку (b, a), яка є безпечною.

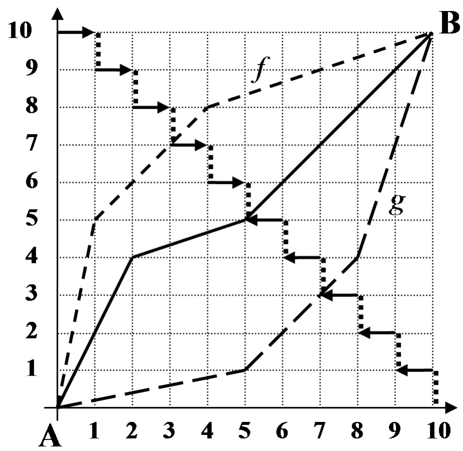

Рис. 6

Це зрозуміло з таких міркувань. Якщо точка небезпечна та лежить всередині горизонтального відрізку, то симетрична їй точка лежить всередині вертикального відрізку сходів, тобто є безпечною. Якщо небезпечна точка є кінцем відрізку, то неважко їх перебрати і переконатись, що симетричні точки є безпечними.

Таким чином траєкторії другої групи розбиваються на пари і в кожній парі одна траєкторія безпечна, інша ні. Отже, загалом безпечних траєкторій більше.

4.1. **(Різні задачі)**
У трикутнику ABC проведено медіани AL, BM, CN. Доведіть, що $\angle ANC = \angle ALC$ тоді і тільки тоді, коли $\angle ABM = \angle LAC$.
Розв'язання. Проведемо середню лінію LN, тоді з паралельності прямих LN та AC випливає, що $\angle NLA = \angle LAC$. Таким чином, тепер треба показати таку рівносильність (рис.7):

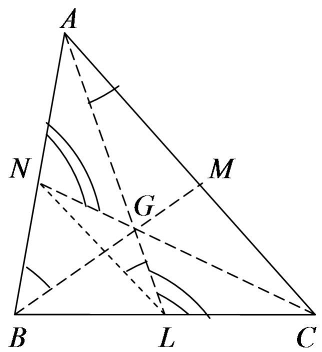

Рис. 7

$$\angle ANC = \angle ALC \quad \Leftrightarrow \quad \angle ABM = \angle NLA.$$

Позначимо точку перетину медіан трикутника ABC через G, тоді маємо такі рівносильні твердження. $\angle ANC = \angle ALC \Leftrightarrow \angle ANC + \angle ALB = \pi \Leftrightarrow$ чотирикутник $BNLG$ – вписаний $\Leftrightarrow \angle ABM = \angle NLA$, оскільки вони спираються на одну дугу.

Твердження доведене.

5.1. **(Різні задачі)**
У селі 8 домів, між якими є доріжки, план яких зображений на рис.8. По кожній з цих доріжок дозволено рухатись лише в одному напрямі. Чи можна так установити напрямок руху по доріжках, щоб від будь-якого дома до будь-якого іншого дома можна було дістатись, пройшовши у дозволених напрямах не більше ніж по двох доріжках?

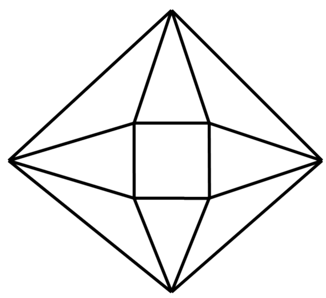
Рис. 8

Відповідь: Не можна.

<u>Розв'язання.</u> Розглянемо 4 хати, які на рис.9 позначені буквами A, B, C, D, між A та C існує рівно два шляхи, які мають не більше двох переходів. Через вершини B та D відповідно. Без обмежень загальності можемо вважати, що напрямок доріжок там обраний як на рис.9.
Є 2 шляхи від B до A, які містять не більше двох переходів – це прямі напрямок, а також через вершину E. Оскільки прямий напрямок вже йде у зворотному напрямі, то це визначає однозначно напрям по доріжках BE та EA. Аналогічно визначається напрямок відрізків FA та FD. Розглянемо припустимі шляхи між F та B, а також між E та D. Обидва цих маршрути проходять вздовж доріжки FE, але вимагають протилежних напрямів. Одержане доводить неможливість потрібної розстановки напрямів.

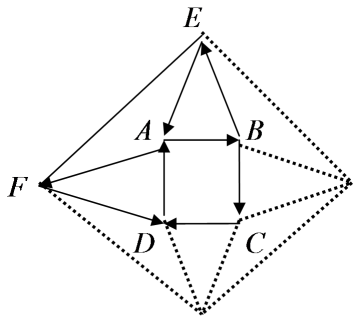

Рис. 9

<u>9 клас</u>

1. **(Різні задачі)**

Знайдіть усі значення параметра b, при яких для кожного x принаймні одна з функцій $f_1(x) = x^2 + 2011x + b$ чи $f_2(x) = x^2 - 2011x + b$ приймає додатнє значення.

<u>Відповідь:</u> $b > 0$.

<u>Розв'язання.</u> При $x = 0$ маємо $f_1(0) = f_2(0) = b$, тому значення $b \leq 0$ умову не задовольняє.

Нехай тепер $b > 0$. Додамо значення обох квадратичних функцій і одержимо, що $f_1(x) + f_2(x) = 2x^2 + 2b > 0$, тому принаймні один з цих двох доданків буде додатним. Тобто кожне значення $b > 0$ задовольняє умову.

2. **(Фольклор)**

Доведіть, що існує нескінченна кількість квадратів натуральних чисел, які можна подати у вигляді $2^n + 2^m$, де n, m – деякі різні натуральні числа.

<u>Розв'язання.</u> Покладемо $n = m + 3$, тоді $N = 2^n + 2^m = 2^m(2^3 + 1) = 2^m \cdot 9$, тепер достатньо вибрати $m = 2s$ і будемо мати, що $N = (3 \cdot (2^s))^2$ – квадрат для довільного натурального s.

3. **(Рубльов Богдан)**

У волейбольній першості 8 команд грають в одне коло, кожна з кожною рівно 1 раз. За перемогу нараховується 1 очко, за поразку – 0 очок, нічиїх у волейболі не буває. Якщо по завершенню турніру різниця очок команд, що посіли перше та друге місця, не перевищує 1 очка, між командами проводиться стикова гра. За аналогічних умов стикові ігри проводяться між командами, що посіли 3-є та 4-е, 5-е та 6-е, а також 7-е та 8-е місця. Таким чином максимум може буде проведено 4 стикові гри. Яка найменша кількість стикових ігор може буде проведена по завершенню турніру?

Зауваження. По завершенню турніру при будь-яких результатах кожне місце займає рівно одна команда. Навіть якщо у декількох команд рівна кількість очок, вони займають різні місця.

<u>Відповідь:</u> 1.

<u>Розв'язання.</u>

Якщо припустити, що не було проведено жодної стикової гри, то різниця між 1-м та 2-м місцем, 3-м та 4-м, 5-и та 6-м, а також 7-м та 8-м місцем складає не менше ніж 2 очки. Тоді різниця між 1-м місцем та 8-м складає мінімум 8 очок, але переможець може набрати максимум 7 очок (усі перемоги), а остання команда – 0 очок (усі поразки), але навіть тоді різниця не перевищує 7 очок. Одержали суперечність. Таким чином принаймні 1 стикова гра була проведена.

Залишилось навести приклад, коли треба провести лише 1 стиковий матч, наприклад, команди зіграли таким чином, як це показано у таблиці:

$$\begin{vmatrix}
1\text{місце} & X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & =7 \\
2\text{місце} & 0 & X & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & =5 \\
3\text{місце} & 0 & 1 & X & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & =4 \\
4\text{місце} & 0 & 0 & 1 & X & 1 & 0 & 1 & 1 & =4 \\
5\text{місце} & 0 & 0 & 1 & 0 & X & 1 & 1 & 1 & =4 \\
6\text{місце} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & X & 0 & 1 & =2 \\
7\text{місце} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X & 1 & =2 \\
8\text{місце} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & =0
\end{vmatrix}$$

4. **(Веклич Богдан)**

Нехай $ABCD$ – вписаний чотирикутник. Позначимо середини сторін AB, BC, CD та DA через M, L, N та K відповідно. Виявилось, що $\angle BMN = \angle MNC$. Доведіть, що:

а) $\angle DKL = \angle CLK$;

б) у чотирикутнику $ABCD$ є пара паралельних сторін.

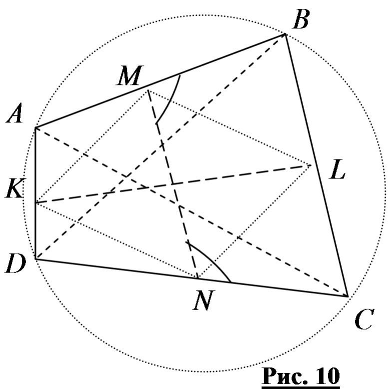

Рис. 10

Розв'язання. а) З властивостей середніх ліній та вписаних кутів маємо, що $KM \parallel BD$, $KN \parallel AC$, $\angle ABD = \angle ACD \Rightarrow \angle AMK = \angle ABD = \angle ACD = \angle KND$. Тому $\angle KMN = \pi - \angle AMK - \angle BMN = \pi - \angle KND - \angle MNC = \angle KNM$, тобто $\triangle KMN$ рівнобедрений, тому $KM = KN$, звідси чотирикутник $KMLN$ – ромб, тому $\angle NKL = \angle NLK$ (Рис.10). Оскільки аналогічно маємо, що $\angle AMK = \angle KND$, $\angle DKN = \angle NLC$, тому $\angle KLD = \angle DKN + \angle NKL = \angle NLC + \angle LNK = \angle CLK$, що завершує доведення пункта а).

б) Оскільки $KM = KN$, то $DB = 2KM = 2KN = AC$, але тоді або $\angle ABC + \angle DAB = \pi$, тоді $DA \parallel BC$, або $\angle ABC = \angle DAB$ – кути спираються на рівні хорди або рівні, або доповнюють один інший до розгорнутого кута. Але тоді, оскільки $\angle DAC = \angle DBC$, то $\angle CAB = \angle DAB - \angle DAC = \angle ABC - \angle DBC = \angle ABD = \angle ACD$, але звідси випливає, що $AB \parallel BC$.

5. **(Сенін Віталій)**

Для невід'ємних чисел a, b, c, що задовольняють умову $a^2b + b^2c + c^2a \leq a + b + c$, доведіть нерівність:

$$ab + bc + ca \leq a + b + c.$$

Розв'язання. Запишемо нерівність Коші-Буняковського для наборів чисел (a_1, a_2, a_3) та (b_1, b_2, b_3):

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

або

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

Підберемо такі набори: $(a_1 = a\sqrt{b}, a_2 = b\sqrt{c}, a_3 = c\sqrt{a})$ та $(b_1 = \sqrt{b}, b_2 = \sqrt{c}, b_3 = \sqrt{a})$. Тоді будемо мати

$$(ab + bc + ca)^2 \leq (a^2b + b^2c + c^2a)(a + b + c) \leq (a + b + c)^2,$$

звідки й випливає потрібна нерівність.

4.1. **(Різні задачі)**

Трикутник ABC вписаний в коло. В точках A та B проведені дотичні до цього кола, які перетинаються в точці T. Пряма, проведена через точку T паралельно стороні AC, перетинає сторону BC у точці D. Доведіть, що $AD = CD$.

Розв'язання. З того, що трикутник ATB рівнобедренний, та кути $\angle TBA$ та $\angle BCA$ спираються на одну дугу, маємо рівність:

$$\angle TBA = \angle TAB = \angle BCA = \angle BDT.$$

Звідси випливає, що чотирикутник $BTAD$ вписаний (рис.11). Тому $\angle BTA = \angle ADC$. Таким чином за двома кутами подібні трикутники ABT та ACD. А оскільки трикутник ATB рівнобедрений, то рівнобедреним також є $\triangle ACD$. Звідси вже знаходимо, що $AD = CD$.

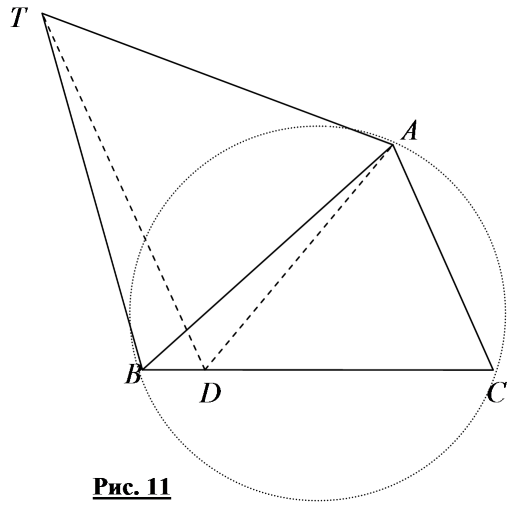

Рис. 11

5.1. **(Торба С., Клурман О., Рубльов Б.)**
Для невід'ємних чисел a, b, c, сума яких не перевищує 2, доведіть нерівність

$$ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) \leq 8.$$

Чи може в цій нерівності досягатись рівність?

Відповідь: Рівність досягатись не може.

Розв'язання. Оскільки $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq 1$. Застосуємо цю оцінку для кожної пари змінних, і ми одержимо, що нам треба довести таку нерівність:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 4.$$

Остання нерівність очевидна, оскільки для додатних чисел маємо, що

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq (a + b + c)^2 = 4.$$

Рівність досягатись не може, оскільки у першій оцінці виконується рівність за умов $a = b$, тому це вимагає рівності усіх змінних, але при умові $a = b = c$ рівність очевидно не виконується.

10 клас

1. **(Фольклор)**
Олеся записує в кожній вершині правильної трикутної призми одне з чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Андрійко записує на кожному ребрі число, що є сумою чисел, записаних Олесею на кінцях цього ребра. Чи може Олеся записати числа так, щоб усі числа, які запише Андрійко, виявились різними?

Відповідь: Можна. Один з прикладів, як можна розставити числа по вершинах, щоб задовольнити умови показаний на рис.12.

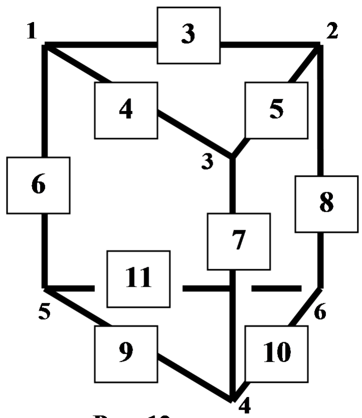

Рис. 12

2. **(Фольклор)**
Відомо, що x_1, x_2, x_3 – попарно різні дійсні числа.
а) Числа x_2, x_3 є нулями функції $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$; числа x_3, x_1 є нулями функції $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$; числа x_1, x_2 є нулями функції $f_3(x) = x^2 + p_3x + q_3$. Чи обов'язково функція $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ має нулі?

б) Числа x_2, x_3 є нулями функції $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$; числа x_3, x_1 є нулями функції $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$; числа x_1, x_2 є нулями функції $f_3(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3$. Чи обов'язково функція $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ має нулі?

Відповідь: а) обов'язково; б) не обов'язково.

Розв'язання. а) Запишемо цю цю функцію у такому вигляді $f(x) = (x-x_2)(x-x_3) + (x-x_1)(x-x_3) + (x-x_1)(x-x_2)$, очевидно, що графіком цієї функції є парабола, яка має гілки, що направлені вгору. Без обмеження загальності можемо вважати, що $x_1 < x_2 < x_3$. Тоді $f(x_2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) < 0$, що рівносильне тому, що у параболи є корені.

б) Розглянемо приклади таких функцій: $f_1(x) = x^2 + x$, $f_2(x) = x^2 - x$, $f_3(x) = 1 - x^2$, вони мають корені $0, -1$, $0, 1$ та $-1, 1$ відповідно. Їх сума – це функція $f(x) = x^2 + x + x^2 - x + 1 - x^2 = x^2 + 1$, яка очевидно нулів не має.

3. **(Рожкова Марія)**

На площині нарисована трапеція $ABCD$ з основами $BC = a$ та $AD = 2a$. Користуючись лише лінійкою, побудуйте трикутник, площа якого дорівнює площі трапеції.

За допомогою лінійки можна проводити прямі через дві відомі точки.

Розв'язання. За допомогою лінійки побудуємо точку перетину діагоналей трапеції O, а також точку перетину продовжень бокових сторін T. Добре відомо, що на прямій OT лежать середини основ P та E (рис.13). Тоді за умовою $AE = ED = BC = a$. Тому $ABCE$ та $BCDE$ – паралелограми, їх точки перетину діагоналей – це точки M та N відповідно. Таким чином можна провести пряму MN – середю лінію трапеції, яка перетинає бічні сторони в точках K та L відповідно. Тепер проведемо пряму BL, яка перетинає пряму AD у точці F. Тоді $\triangle ABF$ – шуканий, оскільки $\triangle ABF = \triangle BCL$.

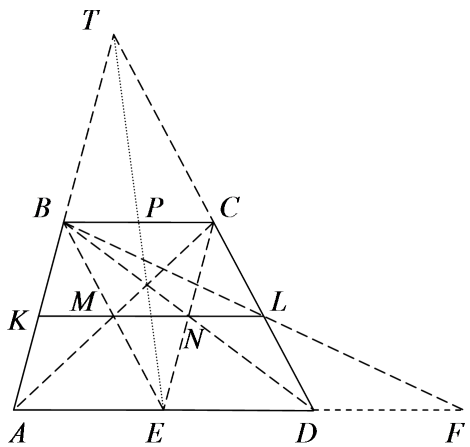

Рис. 13

4. **(Фольклор)**

Задане число $n = 11^{2011} \cdot 2011^{11}$. Скільки існує натуральних дільників числа n^2, які менші від n, але не є дільниками n?

Відповідь: 22121.

Розв'язання. Спочатку підрахуємо кількість N дільників числа $n^2 = 11^{4022} \cdot 2011^{22}$ за відомою формулою:

$$N = (4022 + 1)(22 + 1) = 92529.$$

Оскільки усі дільники числа n^2 можна розбити на пари – d та $\frac{n^2}{d}$, одне з яких більше від числа n, а інше – менше. Саме число n, як дільник n^2, не має пари та не є меншим від n, то кількість дільників числа n^2, які менші від n дорівнює $\frac{92529-1}{2} = 46264$.

Тепер серед усіх цих дільників треба вилучити ті, які є дільниками числа n. Зрозуміло, що вони усі менші від n (саме число n не треба рахувати серед дільників числа n, оскільки ми його не враховували перед цим серед дільників числа n^2, що є меншими від n).

Кількість N_1 дільників числа n, що менші від n, обчислимо за аналогічною формулою:

$$N_1 = (2011 + 1)(11 + 1) - 1 = 24143.$$

Таким чином шукане число дільників дорівнює $46264 - 23143 = 22121$.

5. **(Торба С., Клурман О., Рубльов Б.)**

Для невід'ємних чисел a, b, c, сума яких не перевищує 2, доведіть нерівність

$$ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) \leq 2.$$

Чи може в цій нерівності досягатись рівність?

Відповідь: Рівність досягатись може.

Розв'язання. Очевидно, що достатньо цю нерівність довести для невідємних чисел, що задовольняють рівність $a+b+c=2$.

Позначимо через $x = ab+bc+ac$, тоді

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = 4 - 2(ab+bc+ac) = 2(2-x).$$

Далі з відомої нерівності $x(2-x) \le 1$ маємо, що

$$2+2abc \ge 2 \ge 2x(2-x) = (ab+bc+ac)(a^2+b^2+c^2) =$$
$$= ab(a^2+b^2)+cb(c^2+b^2)+ac(a^2+c^2)+abc(a+b+c),$$

з якої, після скорочення рівних виразів $2abc = abc(a+b+c)$, маємо потрібну нерівність.

Рівність може досягатись, наприклад, при $a=b=1, c=0$.

4.1. **(Різні задачі)**

Числа $a_1, a_2, \dots, a_{11}$ та $b_1, b_2, \dots, b_{11}$ є перестановками чисел $1, 2, \dots, 11$. Доведіть, що серед 11 числа $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_{11}b_{11}$ принаймні два мають однакову остачу при діленні на 11.

Розв'язання. Без обмеження загальності будемо вважати, що $a_{11} = 11$. Якщо при цьому $b_{11} \ne 11$, то, наприклад, $b_1 = 11$ і тоді числа a_1b_1 та $a_{11}b_{11}$ кратні 11, тому дають однакову нульову остачу при діленні на 11. у цьому випадку твердження доведене.

Нехай тепер $b_{11} = 11$. Методом від супротивного, припустимо, що немає двох рівних остач у зазначених чисел. Тоді числа $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_{10}b_{10}$ дають у деякому порядку остачі 1, 2, ..., 10 при діленні на 11. Тоді з одного боку добуток чисел

$$a_1b_1 \cdot a_2b_2 \cdot \ldots \cdot a_{10}b_{10} \equiv 10! \pmod{11}.$$

З іншого боку, оскільки числа $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ та $b_1, b_2, \dots, b_{10}$ є перестановками чисел $1, 2, \dots, 10$, то добуток

$$a_1b_1 \cdot a_2b_2 \cdot \ldots \cdot a_{10}b_{10} \equiv (10!)^2 \pmod{11}.$$

Таким чином числа 10! та $(10!)^2$ дають однакові остачі при діленні на 11. Якщо позначити $10! \equiv q \pmod{11}$, де $q \in \{1, 2, \dots, 10\}$ то, це означає, що число q та q^2 дають однакові остачі при діленні на 11, тобто їх різниця кратна 11, що неможливо. Дійсно,

$$q^2 - q = q(q-1),$$

але кожний з множників q та $q-1$ менший від 11, а тому не може ділитись на просте число 11, а це означає, що і їх добуток також не кратний 11. Одержана суперечність завершує доведення.

Зауваження. Останнє твердження легко показати за теоремою Вільсона, або безпосереднім обчисленням остачі чисел 10! та $(10!)^2$ при діленні на 11.

5.1. **(Торба С., Клурман О., Рубльов Б.)**

Для невід'ємних чисел a, b, c, сума яких не перевищує 2, доведіть нерівність

$$ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2) \le 6.$$

Чи може в цій нерівності досягатись рівність?

Відповідь: Рівність досягатись не може.

Розв'язання. Оскільки $a+b \le 2$, покажемо, що для $a+b=2$ виконується нерівність:

$$ab(a^2+b^2) \le 2.$$

Дійсно, підставимо $b = 2-a$ і одержимо, що $ab(a^2+b^2) = a(2-a)(a^2+(2-a)^2) = (2a-a^2)(2a^2-4a+4) = 2(2a-a^2)(2-(2a-a^2)) = 2t(2-t) \le 2$, що легко випливає з нерівності $2t - t^2 \le 1 \Leftrightarrow (t-1)^2 \ge 0$. Далі застосовуємо одержану нерівність для кожного з трьох доданків, тоді кожний з них не перевищує 2, тому остаточно ліва частина не перевищує 6.

Рівність не може досягатись, бо вона можлива, коли кожний з трьох доданків дорівнює двом, а це можливо лише за умови $a=b=c=1$, що неможливо.

11 клас

1. **(Мисак Данило)**

Розв'язати рівняння $[x^2]-2x+1=0$, де через $[x^2]$ позначено найбільше ціле число, що не перевищує x^2.

Відповідь: $x=1$, $x=\frac{1}{2}$ або $x=\frac{3}{2}$.

Розв'язання. Перенесемо $2x$ у праву частину та поділимо на 2. Матимемо, що $x=\frac{[x^2]+1}{2}$. Отже, x — напівціле число, і або $x=t$, або $x=t+\frac{1}{2}$, де t — деяке ціле число. Якщо $x=t$, маємо, що $[x^2]-2x+1=[t^2]-2t+1=t^2-2t+1=(t-1)^2=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x=1$. Якщо ж $x=t+\frac{1}{2}$, то $[x^2]-2x+1=[(t+\frac{1}{2})^2]-2(t+\frac{1}{2})+1=[t^2+t+\frac{1}{4}]-2t-1+1=t^2+t-2t=t^2-t=t(t-1)=0 \Leftrightarrow t=0$ або $t=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ або $x=\frac{3}{2}$.

2. **(Фольклор)**

Знайдіть усі натуральні числа a і b, різниця яких дорівнює 2011, а добуток – точний квадрат натурального числа.

Відповідь: $\left(\frac{2011+1}{2}\right)^2=1012036$ та $\left(\frac{2011-1}{2}\right)^2=1010025$.

Розв'язання. Оскільки $a-b=2011$, а число 2011 – просте, то НСД шуканих чисел (a,b) є дільником простого числа 2011, тому це буде або 1, або 2011.

1 випадок. Якщо $(a,b)=1$, тобто числа взаємно прості, то кожне з них повинне бути квадратом цілого числа. Позначимо відповідно $a=c^2$, $b=d^2$, тоді маємо, що $a-b=c^2-d^2=(c-d)(c+d)=2011=1\cdot 2011$, звідки маємо систему рівнянь $\begin{cases} c-d=1, \\ c+d=2011. \end{cases}$ З цієї системи рівнянь знаходимо, що $c=\frac{2011+1}{2}=1006$ та $d=\frac{2011-1}{2}=1005$, звідки й маємо наведену відповідь.

2 випадок. Якщо $(a,b)=2011$, то $a=2011c$, $b=2011d$, де $(c,d)=1$. Тоді $ab=2011^2cd$, звідки випливає, що $c=e^2, d=f^2$ – точні квадрати натуральних чисел. Але тоді $a-b=2011(c-d)=2011$, тобто $c-d=(e-f)(e+f)=1$, що для точних квадратів неможливо.

3. **(Фольклор)**

Є 2012 куп камінців. Перша з них містить 2^0 камінців, друга містить 2^1 камінців, третя – 2^2 камінців, і так далі. 2012 купка містить 2^{2011} камінців. За один хід дозволяється обрати довільні три купки камінців та додати у першу 2 камінці, у другу – 3, у третю – 4 камінці, або обрати довільні три купки камінців та забрати з першої купки 2 камінці, з другої – 3, з третьої – 4 камінці, при умові, що у обраних купках є достатня кількість камінців.

Чи можна за скінченну кількість ходів одержати ситуацію, при якій у кожній купці знаходиться рівно по 3^{1005} камінців?

Відповідь: Не можна.

Розв'язання. При таких операціях сумарна кількість камінців в усіхї купках змінюється на число, що кратне 9. У кінцевий момент це число дорівнює $2012\cdot 3^{1005}$ і також кратне 9. Але у початковий момент кількість камінців дорівнює

$$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{2011}=2^{2012}-1.$$

Знайдемо остачу при діленні цього числа на 9. $2012=335\cdot 6+2$, $2^6=64\equiv 1 \pmod 9$, тому

$$2^{2012}-1\equiv \left(2^6\right)^{335}\cdot 2^2-1\equiv 4-1=3 \pmod 9.$$

Тобто це число на 9 не ділиться, звідки й випливає неможливість.

4. **(Ясинський Вячеслав – 23)**

На діагоналях AC і BD вписаного чотирикутника $ABCD$ відмітили точки X і Y відповідно так, що чотирикутник $ABXY$ є паралелограмом. Доведіть, що описані кола трикутників BXD та CYA мають рівні радіуси.

Розв'язання. Оскільки чотирикутник $ABCD$ – вписаний, то $\angle ABD=\angle ACD$, як вписані, що спираються на одну і ту ж саму дугу $\smile AD$. Крім того, $\angle ABD=\angle ABY=$

$\angle BYX$, як внутрішні різносторонні при паралельних AB і XY та січній BY. Отже, чотирикутник $CXYD$ – вписаний в коло, бо $\angle XCD = \angle XYB$ (рис.14).

З того, що чотирикутник $CXYD$ – вписаний, випливає, що $\angle XCY = \angle XDY$, як вписані, що спираються на одну і ту ж саму дугу $\smile XY$. З рівності цих кутів випливає, що $\sin\angle ACY = \sin\angle BDX$. Крім того, $BX = AY$, як протилежні сторони паралелограма. За теоремою синусів з трикутників BXD і CAY знаходимо:

$$R_{BDX} = \frac{BX}{\sin\angle BDX} = \frac{AY}{\sin\angle ACY} = R_{CYA},$$

що і треба було довести.

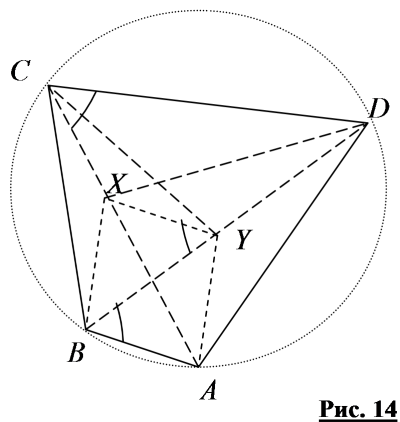

Рис. 14

5. **(Рибак Олександр)**

Нехай $P(x)$ – многочлен з цілими коефіцієнтами. Відомо, що для деякого цілого a існує натуральне число n таке, що $\underbrace{P(P(\ldots P(a)\ldots))}_{n} = a$. Доведіть, що для цього a також виконується умова $P(P(a)) = a$.

Розв'язання. Визначимо послідовність (a_i) таким чином: $a_0 = a$, $a_i = P(a_{i-1})$ для усіх натуральних i. Розглянемо найменше натуральне m, для якого існує таке натуральне $j < m$, що має місце рівність $a_j = a_m$. З умови задачі випливає, що таке значення існує. З того, що ми вибрали найменше m випливає, що $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ – попарно різні.

Покажемо тоді, що $j = 0$. Якщо це не так, то послідовність буде мати такий вигляд:

$$a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{m-1}, a_m = a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{m-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{m-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots,$$

і число, що дорівнює a_0 у цій послідовності більше не зустрінеться, що суперечить умові.

Отже $a_0 = a_m$, і ця послідовність є m-періодичною, тобто $a_p = a_q$ тоді і тільки тоді, коли $p - q \vdots m$.

Нехай серед чисел $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ найбільшим є a_l, а найменшим є a_k. Якщо $a_l = a_k$, тобто усі члени послідовності рівні, то $m = 1$ і відповідно $P(a) = a$ звідки й $P(P(a)) = a$.

Нехай тепер $a_l > a_k$, з того, що коефіцієнти многочлен - цілі, усі члени послідовності також цілі. Тому $P(a_l) - P(a_k)$ ділиться на $a_l - a_k$, але значення $P(a_l), P(a_k)$ – також члени послідовності, звідки випливає, що $|P(a_l) - P(a_k)| \le |a_l - a_k|$, тому різниця $P(a_l) - P(a_k)$ може дорівнювати або 0, або $\pm(a_l - a_k)$.

Якщо $P(a_l) - P(a_k) = a_l - a_k$, то різниця між членами послідовності така сама, як між найбільшим та найменшим, тобто вони зберігають свої значення, тому $P(a_k) = a_k$, звідки знову маємо, що $m = 1$ та $a_l = a_k$.

Якщо $P(a_l) - P(a_k) = 0$, тобто $a_{l+1} = P(a_l) = P(a_k) = a_{k+1}$, два члени послідовності рівні, тому $(l+1) - (k+1) = l - k$ ділиться на m, звідки знову випливає, що $l = k$ та $m = 1$.

Якщо $P(a_l) - P(a_k) = -(a_l - a_k)$, то це можливо лише за умови, що $P(a_l) = a_k$, $P(a_k) = a_l$, оскільки різниця між такими членами послідовності $P(a_k) - P(a_l) = a_l - a_k$ – максимальна можлива, що може бути лише при вказаній умові. Таким чином $P(a_l) = a_k$, $P(a_k) = a_l$, а це означає, що $m = 2$, звідки й випливає, що $m = 2$, що тягне за собою $P(P(a)) = a$.

4.1. **(Різні задачі)**

Всередині паралелограма $ABCD$ розташовані кола γ_1 та γ_2, які дотикаються зовнішнім чином у точці K. Коло γ_1 дотикається до сторін AD та AB паралелограма, а коло γ_2 дотикається до сторін CD та CB. Доведіть, що точка K лежить на діагоналі AC паралелограма.

Розв'язання. Позначимо центри кіл відповідно через O_1, O_2 (рис.15). Розглянемо гомотетію $H_K^k(\gamma_1)$ з центром в точці K і коефіцієнтом $k = -\frac{KO_2}{KO_1}$. Тоді коло γ_1 переходить у коло γ_2, дотичні AD та AB до кола γ_1 переходять відповідно у дотичні CB та CD до кола γ_2. Таким чином і точка перетину першої пари дотичних - вершина A переходить при зазначеній гомотетії у точку перетину іншої пари дотичних, тобто у вершину C. Звідси випливає, що центр гомотетії K розташований на прямій AC, що й треба було довести.

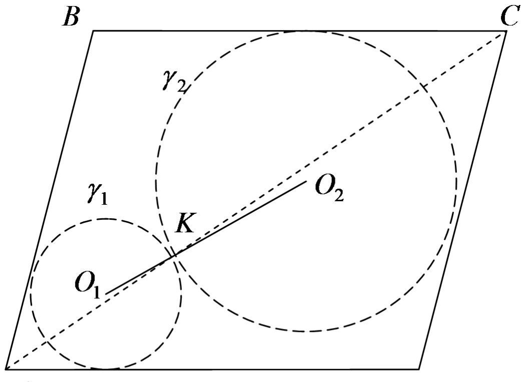

Рис. 15

5.1. **(Різні задачі)**

Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які задовольняють такі дві умови:

1) для усіх дійсних чисел x, y виконується рівність

$$f(2x) = f(x+y)f(y-x) + f(x-y)f(-x-y).$$

2) $f(x) \geq 0$ для усіх дійсних x.

Відповідь: $f \equiv 0$ та $f \equiv \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Підставимо у задану рівність $x = y$ і одержимо, що для усіх дійсних x справджується рівність:

$$f(2x) = f(0)f(2x) + f(0)f(-2x). \qquad (1)$$

Тепер у рівність (1) підставимо $x = 0$ і будемо мати, що $f(0) = 2f^2(0)$. Звідси маємо дві можливості: $f(0) = 0$ та $f(0) = \frac{1}{2}$.

Якщо $f(0) = 0$, то з рівності (1) маємо, що для усіх дійсних x маємо $f(2x) = 0$, тобто $f \equiv 0$.

Якщо $f(0) = \frac{1}{2}$, то з рівності (1) маємо, що $f(2x) = \frac{1}{2}f(2x) + \frac{1}{2}f(-2x)$, або $f(2x) = f(-2x)$, тобто функція – парна.

Покладемо тепер у початкову рівність $x = 0$, тоді внаслідок парності функції маємо, що

$$frac12 = f(0) = (f(y))^2 + (f(-y))^2 = 2(f(y))^2.$$

Звідси знаходимо остаточно, що $f \equiv \frac{1}{2}$.

Перевіркою переконуємось, що обидві задані розв'язки задовольняють умови.