

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
 Київський міський педагогічний університет імені Б.Д. Грінченка  
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
 Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2010-2011 рік

1 тур

11 клас

1. Розв'язати рівняння  $[x^2] - 2x + 1 = 0$ , де через  $[x^2]$  позначено найбільше ціле число, що не перевищує  $x^2$ .

2. Знайдіть усі натуральні числа  $a$  і  $b$ , різниця яких дорівнює 2011, а добуток – точний квадрат натурального числа.

3. Є 2012 куп камінців. Перша з них містить  $2^0$  камінців, друга містить  $2^1$  камінців, третя –  $2^2$  камінців, і так далі. 2012 купка містить  $2^{2011}$  камінців. За один хід дозволяється обрати довільні три купки камінців та додати у першу 2 камінці, у другу – 3, у третю – 4 камінці, або обрати довільні три купки камінців та забрати з першої купки 2 камінці, з другої – 3, з третьої – 4 камінці, при умові, що у обраних купках є достатня кількість камінців.

Чи можна за скінченну кількість ходів одержати ситуацію, при якій у кожній купці знаходиться рівно по  $3^{1005}$  камінців?

4. На діагоналях  $AC$  і  $BD$  вписаного чотирикутника  $ABCD$  відмітили точки  $X$  і  $Y$  відповідно так, що чотирикутник  $ABXY$  є паралелограмом. Доведіть, що описані кола трикутників  $BXD$  та  $CYA$  мають рівні радіуси.

5.1. Знайдіть усі функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , які задовольняють такі дві умови:

1) для усіх дійсних чисел  $x, y$  виконується рівність

$$f(2x) = f(x+y)f(y-x) + f(x-y)f(-x-y).$$

2)  $f(x) \geq 0$  для усіх дійсних  $x$ .

22 січня 2011 р.

На виконання завдання відводиться 4 години  
 Кожна задача оцінюється в 7 балів

**Користування будь-якими зовнішніми джерелами інформації,  
 а також будь-якими електронними засобами забороняється**  
**Умови та розв'язання задач по усіх класах будуть наведені  
 на сайті [www.matholymp.org.ua](http://www.matholymp.org.ua)**