Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Київський міський педагогічний університет імені Б.Д. Грінченка
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2010-2011 рік

1 тур

11 клас

1. Розв'язати рівняння $[x^2]-2x+1=0$, де через $[x^2]$ позначено найбільше ціле число, що не перевищує x^2.

2. Знайдіть усі натуральні числа a і b, різниця яких дорівнює 2011, а добуток – точний квадрат натурального числа.

3. Є 2012 куп камінців. Перша з них містить 2^0 камінців, друга містить 2^1 камінців, третя – 2^2 камінців, і так далі. 2012 купка містить 2^{2011} камінців. За один хід дозволяється обрати довільні три купки камінців та додати у першу 2 камінці, у другу – 3, у третю – 4 камінці, або обрати довільні три купки камінців та забрати з першої купки 2 камінці, з другої – 3, з третьої – 4 камінці, при умові, що у обраних купках є достатня кількість камінців.

Чи можна за скінченну кількість ходів одержати ситуацію, при якій у кожній купці знаходиться рівно по 3^{1005} камінців?

4. На діагоналях AC і BD вписаного чотирикутника $ABCD$ відмітили точки X і Y відповідно так, що чотирикутник $ABXY$ є паралелограмом. Доведіть, що описані кола трикутників BXD та CYA мають рівні радіуси.

5. Нехай $P(x)$ – многочлен з цілими коефіцієнтами. Відомо, що для деякого цілого a існує натуральне число n таке, що $\underbrace{P(P(\ldots P(a)\ldots))}_{n}=a$. Доведіть, що для цього a також виконується умова $P(P(a))=a$.

22 січня 2011 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Користування будь-якими зовнішніми джерелами інформації, а також будь-якими електронними засобами забороняється
Умови та розв'язання задач по усіх класах будуть наведені на сайті www.matholymp.org.ua