

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Київський міський педагогічний університет імені Б.Д. Грінченка  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2010-2011 рік

1 тур

8 клас

1. Відмінниці Олесі задали додому обчислити суму двох звичайних нескоротних дробів  $\frac{a}{b}$  і  $\frac{c}{d}$  (не обов'язково правильних). Її однокласник Андрійко хворів і перепитав це завдання телефоном, але не так почув і записав, що треба додати такі два дробу  $\frac{b}{a}$  і  $\frac{d}{c}$ . Коли він їх додав, то запитав у Олесі відповідь. Виявилось, що відповіді співпали. Чи правильно додав свої дробу Андрійко, якщо Олеся одержала відмінну оцінку, а усі 4 дробу, що додавали Андрійко та Олеся, були попарно різними?

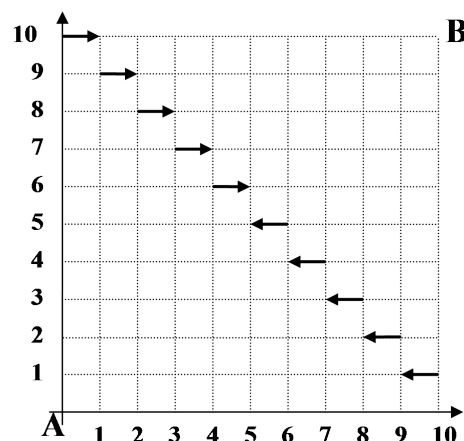
2. Знайдіть усі цілі числа  $n$ , які задовольняють рівність:

$$(n-1)(n-3)(n-5)\dots(n-2011) = n(n+2)(n+4)\dots(n+2010).$$

3. Числа  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  та  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  є перестановками чисел 1, 2, 3, 4, 5. Доведіть, що серед п'яти чисел  $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4, a_5b_5$  принаймні два мають однакову остачу при діленні на 5.

4. Нехай  $ABCD$  – вписаний чотирикутник. Позначимо середини сторін  $AB, BC, CD$  та  $DA$  через  $M, L, N$  та  $K$  відповідно. Виявилось, що  $\angle BMN = \angle MNC$ . Доведіть, що  $\angle DKL = \angle CLK$ .

5. В космічному квадраті з діагоналлю  $A(0;0)B(10;10)$  космічний човен має доставити непоміченим секретний лист з точки  $A$  в точку  $B$ . Човну дозволяється рухатись таким чином: перебуваючи в точці  $(n_1; m_1)$ , де  $n_1, m_1$  – цілі числа однакової парності, переміститись по прямій у будь-яку точку  $(n_2; m_2)$ , де  $n_2 > n_1, m_2 > m_1$  та цілі числа  $n_2, m_2$  також однакової парності. Вороги встановили радари, які дозволяють виявити човен. Зона покриття радарів показана стрілками на рисунку. Човен буде виявлений, якщо його траєкторія перетне зону дії радару (точка, у якій закінчується стрілка, не входить до зони покриття радару). Яких траєкторій руху космічного човна більше – тих, де човен буде виявлено чи тих, де човен помічено не буде?



22 січня 2011 р.

На виконання завдання відводиться 4 години  
Кожна задача оцінюється в 7 балів

**Користування будь-якими зовнішніми джерелами інформації,  
а також будь-якими електронними засобами забороняється**  
**Умови та розв'язання задач по усіх класах будуть наведені  
на сайті [www.matholymp.org.ua](http://www.matholymp.org.ua)**