



Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти

XIV ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ІМЕНІ ПРОФЕСОРА М. Й. ЯДРЕНКА

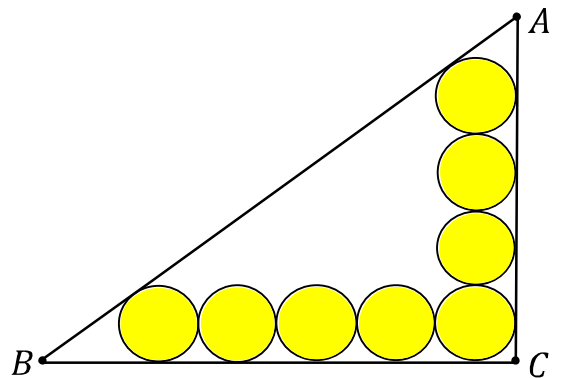
Завдання для відбірних етапів турніру*

Дорогі друзі — юні шанувальники математики! Деякі із задач, що пропонуються нижче, досить складні і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У певних ситуаціях вашій команді буде варто поставити й розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної «боротьби», оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру (нехтування ж можливостями узагальнення інколи призводить до втрати балів).

Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. **«Найменше значення».** Знайдіть усі такі трійки натуральних чисел a , b і c , для яких вираз $\frac{1024}{a} + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{2}$ набуває свого найменшого значення.

2. **«Ланцюжок кіл».** Вісім кіл радіуса r розташовані в прямокутному трикутнику ABC (кут C — прямий) так, як зображено на рисунку (кожне з кіл дотикається до відповідних сторін трикутника та інших кіл). Знайдіть радіус вписаного кола трикутника ABC .



3. **«Числові конструкції та суми кубів і квадратів».** а) Доведіть, що для будь-якого натурального $k \geq 2$ існує таке натуральне число, яке можна подати у вигляді суми $2, 3, \dots, k$ кубів натуральних чисел.

б) Доведіть, що для будь-якого натурального $n \geq 3$ існує таке натуральне число, куб якого можна подати у вигляді суми кубів n попарно різних натуральних чисел.

* Для проведення шкільних, районних, міських та обласних етапів турніру відповідні журі й оргкомітети можуть частково змінювати запропонований перелік задач.

в) Доведіть, що для будь-якого натурального n існує таке натуральне число, квадрат якого можна подати у вигляді суми $2, 3, \dots, n$ квадратів попарно різних натуральних чисел.

4. «**Біноміальні коефіцієнти та системи числення**». а) Як за розкладами натуральних чисел n і m у двійковій системі числення визначити, чи є біноміальний коефіцієнт C_n^m парним числом? б) Як за розкладами натуральних чисел n і m у двійковій системі числення визначити показник *найбільшого* степеня числа 2, на який ділиться без остачі біноміальний коефіцієнт C_n^m ?

5. «**Ковзаюче коло**». Коло ω_0 дотикається до прямої ℓ у точці A . Нехай R — задане додатне число. Розглядаються всілякі кола ω радіуса R , які дотикаються до прямої ℓ та мають з колом ω_0 дві різні спільні точки. Точку дотику кола ω з прямою ℓ позначимо через D , а точки перетину кіл ω та ω_0 — через B і C (вважаємо, що відстань від точки B до прямої ℓ більше за відстань від точки C до цієї прямої). Знайдіть геометричне місце центрів описаних кіл усіх таких трикутників ABD .

6. «**Функціональні рівняння**». Знайдіть усі такі функції $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, що для всіх дійсних x і y виконується рівність:

а) $f(f(x) + y^2) = x + y^2$;

б) $f(f(f(x)) + y) = x + y$.

7. «**Складна нерівність**». Нехай задано три набори довільних дійсних чисел:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Доведіть, що має місце нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \right)^3 \leq \frac{1}{8} \left(\sum_{k=1}^n a_k^4 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^4 + \sum_{k=1}^n c_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n c_k^4 + \sum_{k=1}^n a_k^2 \right).$$

8. «**Намисто симетричних нерівностей**». Для нерівних додатних дійсних чисел x і y доведіть такі нерівності:

а) $\frac{8}{(x+y)^2} \leq \frac{2}{(x-y)^2} + \frac{1}{2xy}$;

б) $\frac{18}{(x+y)^4} \leq \frac{2}{(x-y)^4} + \frac{1}{x^3 y + x y^3}$;

в) $\frac{16}{(x+y)^6} \leq \frac{4}{(x-y)^6} + \frac{1}{3x^5 y + 10x^3 y^3 + 3x y^5}$.

Для кожної з нерівностей знайдіть усі пари додатних чисел x і y , $x \neq y$, для яких досягається рівність.

9. «**Несподівані точні квадрати**». Доведіть, що існує така трійка натуральних чисел a , b і c , що кожне з чисел $a+b+c$, $ab+bc+ca$, $a^2+b^2+c^2$ та abc є точний квадрат. Дослідіть питання щодо скінченності чи нескінченності множини всіх таких трійок (вважаємо, що числа одної трійки не можуть бути отримані множенням відповідних чисел іншої трійки на одне й те саме число).

10. «**Вага многочлена**». Вагою $\mu[P(x)]$ відмінного від константи многочлена $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, записаного в стандартному вигляді — тобто у вигляді $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, де $a_n \neq 0$, — будемо називати суму квадратів усіх його коефіцієнтів: $\mu[P(x)] = a_n^2 + a_{n-1}^2 + \dots + a_1^2 + a_0^2$.

Нехай $Q(x) = 3x^2 + 7x + 2$. Знайдіть принаймні один такий многочлен $P(x)$, що $P(0) = 1$, і для будь-якого натурального числа m виконується рівність

$$\mu[(P(x))^m] = \mu[(Q(x))^m].$$

11. «**Бісектриса та висоти**». Нехай висоти BB_1 і CC_1 гострокутного трикутника ABC перетинають його бісектрису AL у двох різних точках P і Q відповідно. Позначимо через F таку точку, що $PF \parallel AB$ та $QF \parallel AC$, а через T — точку перетину дотичних, проведених у точках B і C до описаного кола трикутника ABC . Доведіть, що точки A , F і T лежать на одній прямій.

12. «**Циклічна система рівнянь**». Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{3x-y}{x-3y} = x^2, \\ \frac{3y-z}{y-3z} = y^2, \\ \frac{3z-x}{z-3x} = z^2. \end{cases}$$

13. «**Дробові частини**». Нехай $[x]$ — найбільше ціле число, яке не перевищує x , $\{x\} = x - [x]$.

а) Доведіть, що існує число $\lambda > 0$, яке задовольняє такі три умови:

$$\frac{1}{10} < \{\lambda\} < \frac{9}{10}, \quad \{\lambda^2\} < \frac{1}{10^6}, \quad \{\lambda^3\} < \frac{1}{10^6}.$$

б) Чи може таке число λ належати проміжку $(0;5)$?

14. «**Вписаний чотирикутник**». Дано вписаний у коло ω чотирикутник $ABCD$, у якому $AB = AD$, $CB = CD$. Візьмемо точку $P \in \omega$. Нехай вершини чотирикутника $Q_1Q_2Q_3Q_4$ симетричні точці P відносно прямих AB , BC , CD і DA відповідно.

а) Доведіть, що точки, симетричні точці P відносно прямих Q_1Q_2 , Q_2Q_3 , Q_3Q_4 і Q_4Q_1 , лежать на одній прямій.

б) Доведіть, що коли точка P рухається по колу ω , то всі такі прямі проходять через одну спільну точку.

15. «**Розбиття на групи**». Задано деяку послідовність натуральних чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, у якій кожне натуральне число зустрічається рівно один раз (тобто для кожного натурального числа s існує рівно одне $p \in \mathbf{N}$ таке, що $a_p = s$).

а) Чи завжди знайдеться таке m , що в множині $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ існує підмножина, сума елементів якої дорівнює $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{2}$?

б) Таке ж саме питання, якщо в заданій послідовності для всіх натуральних k виконується нерівність $a_k \leq k^2$.

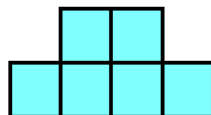
16. «**Перерізи многогранників**». Дослідіть питання щодо найбільшої кількості сторін многокутників, які можна отримати в перерізі площиною:

а) правильних многогранників;

б) опуклих октаедрів, які не є правильними (тут ми вважаємо *опуклим октаедром* будь-який опуклий многогранник з 8 трикутними гранями, 12 ребрами та 6 вершинами, з кожної з яких виходить по 4 ребра).

Чи існує такий опуклий n -гранник, що будь-який многокутник, отриманий у його перерізі площиною, має не більше за $n/10$ сторін?

17. «**Розрізання шахівниць**». Дослідіть питання щодо умов (необхідних та/або достатніх), за яких клітчасті прямокутники можна розрізати по лініях сітки на фігурки, кожна з яких є або клітчастим квадратом розміру 2×2 , або шестиклітинковим поліміно вигляду



в довільній орієнтації (з повертаннями та перевертаннями).

Матеріали для проведення відбірних етапів турніру підготували:

Н. І. Белухов, В. О. Борисова, Р. А. Заторський, О. В. Карлюченко, О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, Д. Ю. Мітін, М. О. Перестюк, О. Н. Нестеренко, В. В. Плахотник, К. В. Рабець, В. М. Радченко, М. М. Рожкова, О. Ю. Теплінський, О. К. Толпиго, І. В. Федак, А. В. Чайковський, В. А. Ясінський.

Web-сторінка Всеукраїнського турніру юних математиків: www.ukrtym.blogspot.com.