**ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.**

**2016- 2017 навчальний рік. Вказівки до розв’язування задач.**

1. **клас**
2. Гномики зібрали в подарунок для Білосніжки – 1000 смарагдів. Кількість смарагдів, принесених кожним гномиком, можна записати числом, що в своєму записі містить лише цифру 5. Якщо скласти вираз у вигляді суми цих чисел, то в записі суми нарахували 20 п’ятірок. Знайди скільки гномиків привітали Білосніжку?

**Відповідь.** 10 гномиків

**Розв’язання***.* 5+55+…+55+555=1000 (вісім доданків 55).

2. Знайти найбільше число, якщо відомо, що всі його цифри різні, а їх добуток дорівнює 360.

**Відповідь:** 95421.

3. В пересувному цирку було троє поні : чорний, сивий і рябий. Гриви в них – біла, срібна і золота, а вуздечки – червона, синя і зелена. Вуздечка у сивого поні не червона, а у рябого – не синя. Поні з зеленою вуздечкою – білогривий, а в поні з червоною вуздечкою грива не срібна, а в першого поні - золота. Яка грива і яка вуздечка у кожного поні?

**Відповідь.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| масть | грива | вуздечка |
| чорний | золота | червона |
| сивий | срібна | синя |
| рябий | біла | зелена |

4. Числа складаються з 2016 однакових цифр. Скільки серед цих чисел таких, що: 1) діляться на 45; 2) діляться на 6.

**Вказівка :** 1) сума цифр кратна 9.Тому число дане в умові ділиться на 3 і на 9. Щоб дане число ділилося на 5, воно має складається з одних п’ятірок. Тоді шукане число поділиться на 45.

**Відповідь:** , одне число.

**Вказівка :** 2)Щоб число ділилося на 6 воно має складатися з 2016 парних цифр.

**Відповідь:** чотири числа, , ,,.

5. Вовчик-братик мав 60 монет і збирався витратити їх на смачний обід. Однак прибігла лисичка-сестричка й підкинула вовчику-братику одну фальшиву монету. Тепер у вовчика 61 монета, серед яких одна фальшива. Як йому за два зважування визначити, легша чи важча фальшивка за решту монет?

***Розв’язання.***Зважуємо дві купки в 30 монет. Можливі два випадки.

1. Якщо ці купки мають однакову масу, то остання монета фальшива. Тоді потрібно одну з монет лівої купки замінити на фальшиву і знову зважити дві купки. Якщо ліва купка важча, то фальшивка важча, а ні – то легша.
2. Якщо ці купки мають різну масу, то беремо важчу купку та ділимо її на дві купки по 15 монет. Якщо маса купок однакова, то фальшивка легша, а ні – то важча.

**ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.**

**2016- 2017 навчальний рік. Вказівки до розв’язування задач.**

1. **клас**
   1. Дирекція лісгоспу вирішила вирубати дубовий ліс, але екологи рішуче виступили проти цього. Тоді директор лісгоспу всіх заспокоїв, сказавши: «У вашому лісі  дубів. Ми будемо рубати тільки їх, причому після рубки дубів залишиться  від всіх дерев». Яку частину лісу має намір вирубати лісгосп?

**Відповідь.** лісгосп має намір вирубати половину лісу.

**Розв’язання.** Оскільки спочатку інших дерев було 1%, а після рубки дубів їх мало стати 2%, то загальна кількість дерев зменшиться вдвічі. Отже, лісгосп має намір вирубати половину лісу.

2.На дорозі між Яремче і Буковелем горизонтальних дільниць немає. Автобус вгору їде зі швидкістю 15 км/год , а вниз – 30 км/год. Яка відстань між цими пунктами, якщо відомо, що шлях туди і назад автобус проїздить за 4 години?

**Відповідь.** 40 км.

**Розв’язання.** Зрозуміло, що загальна довжина як підйомів, так і спусків на маршруті туди і назад дорівнює відстані між селами, яку позначимо через (км), тоді , (км).

3. Дано чотири геометричні фігури: піраміда, конус, куля і куб. Кольори цих фігур – зелений, жовтий, синій, червоний. Фігури розклали в ряд. У якій послідовності розміщені ці фігури та який колір кожної з них, якщо фігура червоного кольору знаходиться між зеленою і синьою, праворуч від жовтої фігури знаходиться конус, куля розміщена правіше від піраміди і конуса, причому піраміда знаходиться не з краю, і, нарешті, фігура синього кольору не поруч із фігурою жовтого кольору?

**Відповідь:**  зліва направо: жовтий куб, зелений конус, червона піраміда, синя куля.

4. Миколка задумав три різні цифри (відмінні від нуля). Марійка з цих цифр склала всі можливі двоцифрові числа, додала їх і отримала суму 231.

Які цифри задумав Миколка?

**Відповідь:** 1, 2, 4

**Вказівка:** Нехай Миколка задумав цифри *a,b,c.* Із цих цифр Марійка склала двоцифрові числа: *aa, ab,ac, bb,ba,bc, cc, ca,cb.* Сума цих двоцифрових чисел .Тоді

. Отже, Миколка задумав цифри: 1,2,4.

5. Сума градусних мір двох кутів АОВ іВОТ дорівнює 264°. Знайти їхні градусні міри, якщо промінь, доповняльний до проме­няОА*,* є бісектрисою

<ВОТ . ОР- бісектриса кута АОВ, промінь ОМ перпендикулярний з ОА. Знайдіть градусну міру < РОМ.

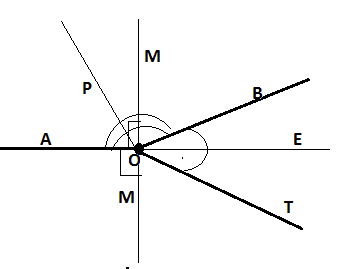
**Відповідь:** < МОР=900+480=1380, або < МОР=900-480=420.

**Розв’язання :** < ТОЕ=<ВОЕ=.

Тому < АОВ=< АОР=< ВОР=

Точки Р та М можуть розташовуватись у різних півплощинах відносно прямої АЕ або в одній , тому розглянемо обидва випадки.

< МОР=900+480=1380, або < МОР=900-480=420.



**ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.**

**2016- 2017 навчальний рік. Вказівки до розв’язування задач.**

1. **Клас**

1. На аркуші були записані перші 20 натуральних чисел. Одне з них замалювали, і виявилось, що серед 19 чисел, що залишились, є число, рівне середньому арифметичному цих 19 чисел. Яке число замалювали?

**Відповідь.** 1 або 20

**Розв’язання.** Сума чисел що залишиться має ділитися на 19. Мінімальне значення суми, що залишиться рівне , а максимальне значення . З чисел 190, … , 209 кратними 19 будуть тільки 190 і 209. Отже, на аркуші могли замалювати 1 або 20.

2.Розкладіть на множники многочлен: *х3* + 6х2 + 11х + 6.

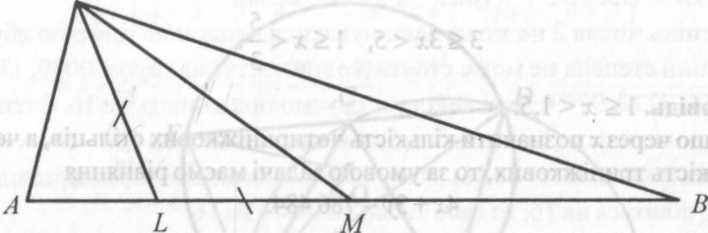
**Розв’язання:** 

3.Бісектриса та медіана, проведені з вершини прямого кута трикутника до перетину з гіпотенузою, є сторонами рівнобедреного трикутника. Знайти гострі кути даного прямокутного трикутника.

Відповідь. 15° і 75°

**Розв’язання.** Для будь-якого трикутника висота *h*, медіана т і бісектриса *l*,проведені з вершини одного і того самого кута, пов'язані співвідношенням:

h<l<т. З умови задачі випливає, що .Виконаємо малюнок .



Мал. 10

Нехай кути утвореного рівнобедреного трикутника СМLпри основі дорівнюють . Подамо решту кутів через кут . За теоремою про суму кутів трикутника маємо рівняння: , звідки

=30°, тоді гострі кути 15° та 75° .

4.Туристична група складається з 23 школярів десяти, одинадцяти, дванадцяти та тринадцяти років, разом всім туристам 253 роки. Скільки в цій групі дванадцяти річних школярів, якщо відомо що їх в півтора рази більше ніж тринадцяти річних?

**Відповідь:** 3 школярів в таборі 12-річні .

5.Знайдіть , якщо , а .

**Відповідь:** 

**Розв’язання:** домножимо обидві частини другого рівняння на 3 і додамо до першого рівняння: , , .

**ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.**

**2016- 2017 навчальний рік. Вказівки до розв’язування задач.**

1. **клас**

1. Автослюсар отримав завдання на виготовлення кількох комплектів

деталей для восьмициліндрових автомобільних двигунів. Слюсар

підрахував, що коли йому вдасться підвищити продуктивність праці на

0,1дет/год, то він зможе виконати завдання на 12 год. раніше строку, а

якщо ще на 0,5 дет./год, то виконає завдання на 36 год. раніше строку.

Скільки деталей потрібно виготовити слюсарю?

**Відповідь: 24 деталі.**

**Розв’язання:**Нехай нормативний час, потрібний на виконання завдання

- х год, а нормативна продуктивність праці-у дет/год. Маємо систему

рівнянь:

 ;

;

де х=60, у=0,4.

Отже необхідно виготовити 24 деталі.

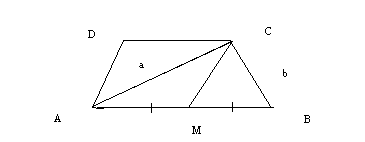
* 1. Розв’язати рівняння: 

**Відповідь:** ;

**Розв’язання:** ; ; . Після заміни  одержимо: , звідки ; маємо ; ; тоді  і . Дискримінант першого рівняння від’ємний, а з другого рівняння маємо: ;.

3.Основа *AB* трапеції *ABCD* вдвічі довша від основи *CD* і вдвічі довша за бічну сторону *AD*. Знайти площу трапеції, якщо діагональ *AC=a*, а бічна сторона *BC=b.*

**Розв’язання:**



Нехай *CD=х, тоді AB=2х.*

Проведемо СМ паралельно AD., тоді AМСD- ромб.

AМ=х, МВ=х, СМ-медіана , , тоді .



, тому 

**Відповідь:** .

1. Нехай a, b, c сторони трикутника. Доведіть нерівність: 

**Доведення.**

Скористаємось нерівністю трикутника та .



5. Є ланцюжок з *n* (*n* >6) сосисок. Два коти по черзі перегризають по одній

перемичці між сосисками і з’їдають утворені одинарні сосиски. Виграє

той кіт, який з’їсть більше сосисок. Опишіть виграшну тактику кота-

переможця.

**Відповідь:** Якщо *n* – непарне, то виграє другий кіт, якщо ж *n* – парне, то

виграє перший кіт.

**Розв’язання.**

1)Якщо *n* – непарне, то виграє другий кіт, якщо ж *n* – парне, то

виграє перший кіт. Нехай *n* – непарне, тобто *n*=2*k*+1. Занумеруємо сосиски

числами від 1 до *n*. Сосиску з номером *k*+1 назвемо центральною. Другому коту кожним своїм ходом потрібно перегризати перемичку симетричну (відносно центральної сосиски) тій, яку перегриз на попередньому кроці перший кіт. Тоді він з’їсть сосисок не менше, ніж перший. Причому перший кіт при такій грі не зможе з’їсти центральну, бо її кінці (перемички) симетричні один одному відносно цієї сосиски. Отже, другий кіт з’їсть не менше *k*+1 сосиски і виграє.

2) Нехай *n* – парне, тобто *n*=2*k*. Занумеруємо сосиски числами від 1 до *n*. В такій ситуації першому коту потрібно з’їсти одну з крайніх сосисок. Тоді перед другим котом виявиться непарна кількість сосисок, а це вже описана програшна тактика для такого кота. Тобто далі першому потрібно відповідати симетричними (відносно центральної сосиски) ходами. При такій стратегії перший кіт з’їсть не менш як на дві сосиски більше, ніж другий.

**ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.**

**2016- 2017 навчальний рік. Вказівки до розв’язування задач.**

1. **клас**

**1.**Добуток всіхчленів геометричної прогресії, що мають непарні номери в 2017 разів більший за добуток всіх її членів з парними номерами. Знайти .

**Відповідь:** 2017.

2.З пункту А по річці відправився пліт. Одночасно йому назустріч вийшов катер з пункту В. Після зустричі з плотом катер одразу развертається і рухається до пункту В. Яку частину відстані від А до В пройде пліт від моменту повернення катера в пункт В, якщо швидкість катера в 4 рази перевищує швидкість течії.

**Відповідь:** 0,4 S.

* 1. Розв’яжіть нерівність .

**Відповідь:**.

**Розв’язання*.*** Зробимо заміну :

       .

* 1. Кожна грань куба зафарбована в чорний або білий колір. Доведіть, що знайдуться дві грані однакового кольору зі спільним ребром.

**Вказівка.** До однієї вершини сходяться три грані. Принаймні дві з них одного кольору, а це й треба було довести.

**5.** Сторони паралелограма дорівнюють a і b, а діагоналі d1 і d2. Відомо, що  Доведіть, що гострий кут паралелограма дорівнює 45º.

**Вказівка.** Нехай у паралелограмі ABCD: АВ=*а*, AD=*b*, BD=d1, AC=d2,  - гострий кут.

У : 

У : 

Перемножимо ліві та праві частини рівняння почленно:

 Але за умовою , тому

 Оскільки – гострий, то , а тому 

**ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.**

**2016- 2017 навчальний рік. Вказівки до розв’язування задач.**

1. **клас**

1. Розв’язати рівняння :

**Відповідь:** *.*

**Розв’язання:**



Тому рівняння має вигляд 

Зробимо заміну 

Тоді 

Отже, 

Перевірка показує, що , є розв’язком заданого рівняння.

2.Знайдіть значення виразу , якщо відомо, що - внутрішні кути трикутника і .

**Відповідь:** 

**Розв’язання:**



3.Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює її меншій основі. Яким має бути кут при більшій основі трапеції, щоб її площа була найбільшою?

**Відповідь.** 60º.

**Вказівка.** В трапеції ABCD проведемо , тоді  У   Розглянемо функцію  та дослідимо її на екстремуми.    

За умовою α – гострий кут. Екстремуму функція  набуває при α=60º (). Розглянемо проміжки зростання (спадання) функції  в залежності від кута α. Найбільшого значення функція  набуває, коли α=60º.

4. Знайдіть значення параметра ***а*** при якому нерівність:

, виконується при всіх .

**Відповідь:** *а* ≥1.

**Розв’язання:**

І) Якщо *а*=1,то отримаємо нерівність 2*х*+1˃0,яка виконується при *х*˃-0,5.

ІІ) Якщо *а*≠1,то маємо нерівність другого степеня. Розглянемо можливі випадки:

а) *а*-1˂0,тоді розв’язки нерівності,якщо вони існують, це відрізок (*х*1;*х*2), який не містить розв’язку нерівності: *х* ˃-0,5.

в) *а*-1˃0, тоді розв’язки нерівності, це проміжки (-∞;*х*1),та (*х*2;+∞), або *R*, які можуть містити в собі *х* ˃-0,5, якщо -0,5 розташоване праворуч нулів функції *f(х)= (а-1)х2+2ах+3а-2*. Отже нерівність:

*(а-1)х2+2ах+3а-2*˃0, виконується при всіх *х*˃-0,5 , якщо ,

де *f(х)= (а-1)х2+2ах+3а-2.*

Отже  , звідси *а* ˃1.

Враховуючи І) та ІІ) отримаємо *а ≥1*.

5.Доведіть нерівність:



**Вказівка:**

При  нерівність правильна: 

Припустимо, що нерівність правильна при , тобто 

Тоді при  маємо: 

Тобто нерівність правильна для будь-якого натурального 